LIMO 2010

UITWERKINGEN

KNAW

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

Universiteit Utrecht

Radboud Universiteit Nijmegen

Universiteit Leiden

Universiteit van Amsterdam

vrije Universiteit amsterdam

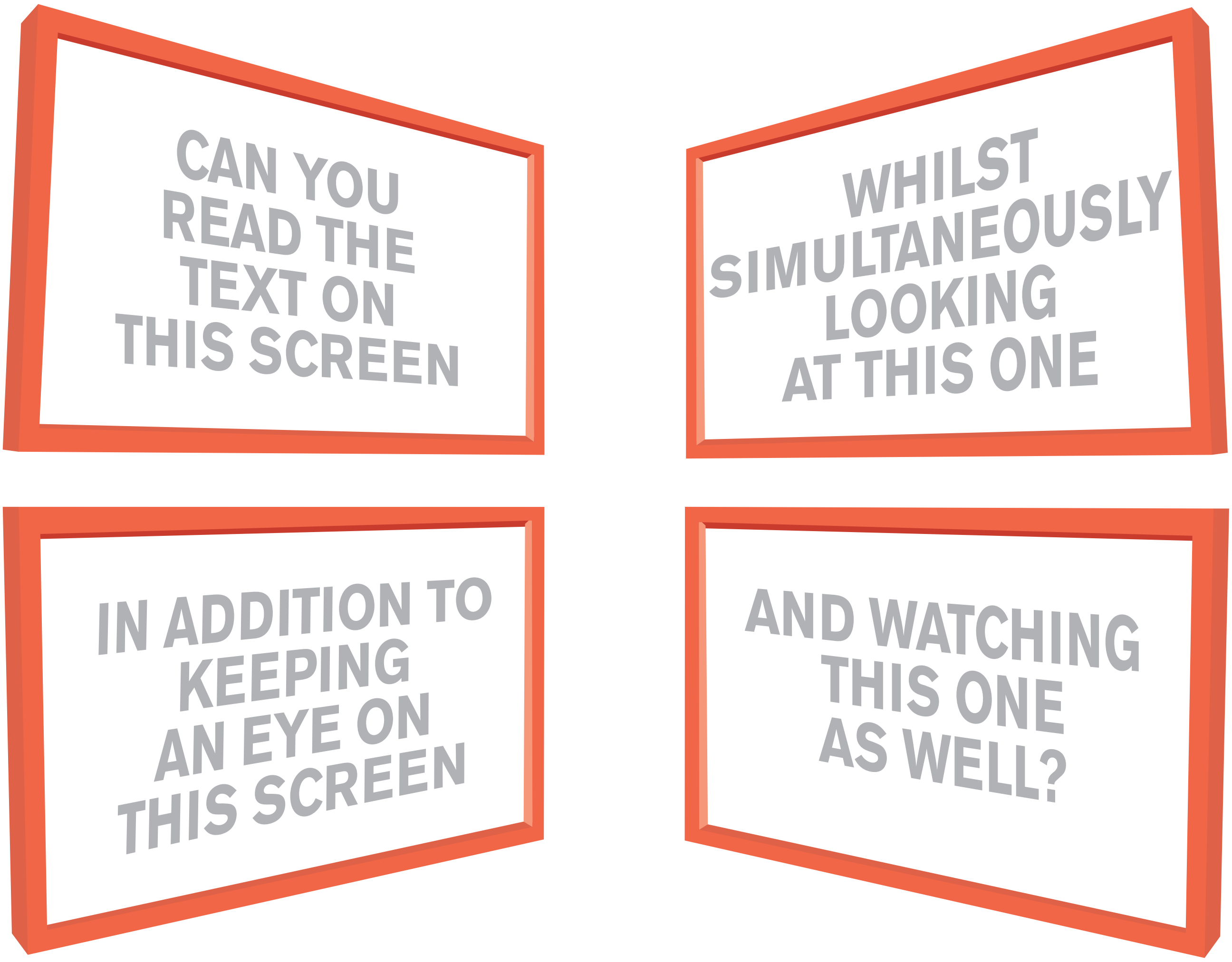
UNIVERSITEIT TWENTE.

TU Delft Delft University of Technology

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

ORTEC

optiver


CAN YOU READ THE TEXT ON THIS SCREEN
WHILST SIMULTANEOUSLY LOOKING AT THIS ONE
IN ADDITION TO KEEPING AN EYE ON THIS SCREEN
AND WATCHING THIS ONE AS WELL?

Inhoudsopgave

1.	De griep versus de Q-koorts	2
2.	De stelling van Sylvester-Gallai	4
3.	Een Islamitisch bewijs van de formules van Heron en Brahmagupta	6
4.	Geen differentiaalvergelijking	11
5.	Dubbele machten	13
6.	Van cirkels naar hyperbolen onder behoud van oppervlakte	15
7.	Een bijna-injectieve functie	19
8.	AlleMachtig!	22
9.	Bijzondere polynomen	25
10.	Nilpotente matrix	27
11.	Muntje Over	29

Colofon
Dit uitwerkingenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2010.
e-mail: limo0910@a-eskwadraat.nl
internet: www.limo.a-eskwadraat.nl

1. De griep versus de Q-koorts

G.W.Q. Puite, Technische Universiteit Eindhoven

Zij X (resp. Y) de stochast die het aantal dagen telt voordat iemand met de griep (resp. de Q-koorts) weer beter is. Er is gegeven dat X en Y de volgende kansverdeling hebben:

$$P(X = k) = pq^{k-1} \qquad (k \geq 1)$$
$$P(Y = k^2) = pq^{k-1} \qquad (k \geq 1),$$

dus X is een meetkundige stochast (*geometric random variable*) en Y is het kwadraat van een onafhankelijke gelijk verdeelde meetkundige stochast. We gaan allereerst op zoek naar een formule voor $\mathbb{E}(X)$ en $\mathbb{E}(Y)$ in termen van p. Daarbij maken we gebruik van de standaardreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad (0 < x < 1). \tag{1.1}$$

Door (termsgewijs) differentiëren van deze machtreeks krijgen we

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}, \tag{1.2}$$

wat leidt tot

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Vermenigvuldigen van (1.2) met x geeft $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$, wat na differentiëren overgaat in

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} kx^k = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}. \tag{1.3}$$

Derhalve

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2} = \frac{2-p}{p}\mathbb{E}(X).$$

Er is gegeven dat $\frac{2-p}{p} = 10$, dus $2 = 11p$, dus $p = \frac{2}{11}$. Daaruit volgt dat $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = \frac{11}{2}$, dus het antwoord op de vraag is dat de griep gemiddeld $5\frac{1}{2}$ dag duurt.

MATHEMATICAL RESEARCH INSTITUTE

MRI is one of the research schools in mathematics in the Netherlands. It is a cooperation of the universities of Groningen, Nijmegen, Utrecht and Twente. The school supports research activities, with special focus on (pre-)graduate students.

MRI Master Class

In the one-year-long Master Class, a current topic is studied intensively and profoundly at an advanced level. The Master Class can form a significant contribution to a PhD programme or can form a preparatory year for a PhD. The programme runs from September through June and includes two full days of lectures and seminars per week and individual work on a test problem. The emphasis is on independent, individual effort, but contact with lecturers is personal and intensive. Lecturers give feedback using the work turned in by participants, as well as extensive exercise material. Regular evaluation and testing guarantees the quality of the programme. 90% of the participants finish the class with successful results and get a certificate.

2010-2011 Master Class **Moduli Spaces**
web.science.uu.nl/mri/documents/brochure2010_11.pdf

Any mathematics student can follow individual courses from this top level programme.

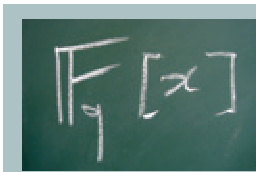
De K.U.Leuven, gesticht in 1425, is de oudste universiteit van de lage landen. Meer dan 4.500 onderzoekers zijn er actief in wetenschappelijk onderzoek en onderwijs. Op 1 februari 2010 telde de K.U.Leuven in totaal 37.021 ingeschreven studenten. Van de ingeschreven studenten heeft ongeveer 86% de Belgische nationaliteit, terwijl 7% een andere EU-nationaliteit heeft en nog eens 7% van buiten de EU komt. Dit maakt van de gezellige provinciehoofdstad Leuven een bruisende studentenstad met een rijk sociocultureel aanbod.

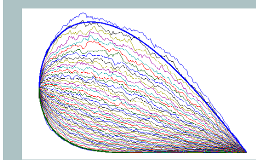
Onderzoek aan het Departement Wiskunde

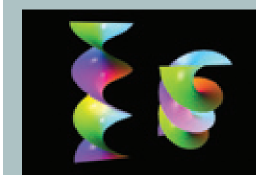
Het onderzoek aan het departement Wiskunde is georganiseerd op het niveau van de onderzoeksafdelingen:

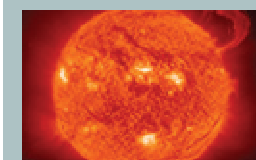
- Afdeling Algebra: het onderzoek situeert zich in de algebraïsche meetkunde, getaltheorie, algebraïsche topologie en groepentheorie.
- Afdeling Analyse: in deze afdeling doet men onderzoek in de klassieke analyse (reële en complexe analyse) en in de functionaalanalyse.
- Afdeling Meetkunde: het onderzoek is gecentreerd rond differentiaalmeetkunde, in het bijzonder Riemannse en pseudo-Riemannse meetkunde en deelvariëteiten.
- Afdeling Plasma-astrofysica: het onderzoeksdomein van deze afdeling is de wiskunde van vloeistoffen en plasma's, het voornaamste studieobject is de zon. Dit onderzoek is gesitueerd in de toegepaste en computationele wiskunde.
- Afdeling Statistiek: deze afdeling is actief in de wiskundige statistiek, in het bijzonder de theorie van extreme waarden, robuuste statistiek en niet-parametrische methoden. Ook stochastische processen en financiële wiskunde komen aan bod. De afdeling is bovendien ook actief in toegepaste consultatie voor bedrijven.

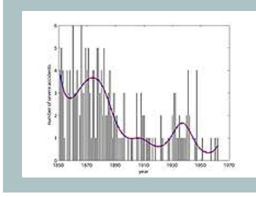
Meer info op http://wis.kuleuven.be











2. De Stelling van Sylvester-Gallai

F. Dillen, Katholieke Universiteit Leuven

Bewijs van de stelling van Sylvester-Gallai

Stel dat niet alle punten op dezelfde rechte liggen. Voor elk punt $P \in \mathcal{P}$ en voor elke rechte L die niet door P gaat, maar wel door tenminste twee andere punten van $\mathcal{P}$, kunnen we de afstand van P tot L bepalen. Aangezien er slechts eindig veel dergelijke punten en eindig veel dergelijke rechten bestaan, kunnen we een dergelijk punt $P \in \mathcal{P}$ en een dergelijke rechte L vinden waarvoor deze afstand het kleinste is. We beweren dat deze rechte slechts twee punten van $\mathcal{P}$ kan bevatten, hetgeen in tegenspraak is met het gegeven.

Stel immers dat L drie punten van $\mathcal{P}$ bevat. Zij Q het punt van L dat het dichtst bij P ligt. Dan liggen zeker twee van de drie punten (die op L liggen) aan dezelfde kant van Q op L. Noem deze punten P_1 en P_2 en veronderstel dat P_2 tussen P_1 en Q ligt (P_2 mag eventueel samenvallen met Q). Beschouw de rechte $L_1 = PP_1$. Dan is het gemakkelijk in te zien dat de afstand van P_2 tot L_1 strikt kleiner dan de afstand van P tot Q, en dit is een contradictie.

Bewijs van de stelling van Erdös-de Bruijn

Als $n = 3$ is de bewering evident. We geven een bewijs door inductie. Veronderstel dat de bewering klopt voor n. Stel dat het aantal elementen van $\mathcal{P}$ gelijk is aan $n + 1$. De stelling van Sylvester-Gallai impliceert dat er een rechte L is die juist twee punten P en Q van $\mathcal{P}$ bevat. Beschouw $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q\}$.

Als niet alle punten van $\mathcal{P}'$ op dezelfde rechte liggen, dan zijn er, door inductie, zeker n rechten die minstens twee punten van $\mathcal{P}'$ bevatten. De rechte L hoort daar niet bij, maar bevat wel twee punten van $\mathcal{P}$. Dus zijn er minstens $n + 1$ rechten die minstens twee punten van $\mathcal{P}$ bevatten.

Als alle punten van $\mathcal{P}'$ wel op dezelfde rechte L' liggen, dan zijn er exact $n + 1$ rechten die aan de voorwaarde voldoen (de verbindingsrechten door elk van de punten van $\mathcal{P}'$ en Q, en de rechte L' zelf).

Realize your master plan

Universiteit Utrecht

[Faculty of Science
Mathematics]

www.math.uu.nl

Master's programmes

Mathematical Sciences

Scientific Computing

Stochastics &
Financial Mathematics

3. Een Islamitisch bewijs van de formules van Heron en Brahmagupta [1]

J.P. Hogendijk, Universiteit Leiden en Universiteit Utrecht

1.
(i) We hebben $AL = BG$, $DA = DG$ en $\angle BGD = \angle BAD = \angle LAD$ (hoeken op dezelfde koorde) en dus $DBG \cong DLA$.
(ii) Noteer het snijpunt van AB en GD met S. Dan geldt

$$\begin{aligned}\Delta ABG + \Delta LDB &= \Delta ASG + \Delta BGS + \Delta BSD + \Delta DSL \\ &= \Delta ASG + \Delta DSL + \Delta DBG \\ &= \Delta ASG + \Delta DSL + \Delta DLA \\ &= \Delta ADG\end{aligned}$$

(iii) Uit (i) volgt dat $BD = DL$. Ook geldt

$$\angle BDL = \angle BDG + \angle GDL = \angle LDA + \angle GDL = \angle GDA$$

De driehoeken ADG en LDB zijn gelijkbenige driehoeken met gelijke tophoeken, dus $ADG \sim LDB$.

2.
(i) Er geldt $\Delta GDZ = \frac{1}{2} GZ \cdot DZ$. Dit geeft

$$\frac{DZ^2}{2\Delta GDZ} = \frac{DZ}{GZ} = \frac{2\Delta GDZ}{GZ^2}$$

(ii) Omdat $DZ \cdot GZ = \Delta ADG$ en $DE \cdot BE = \Delta LDB$ geldt dat

$$(DZ^2 - DE^2)(GZ^2 - BE^2) = \Delta ADG^2 + \Delta LDB^2 - DE^2GZ^2 - DZ^2BE^2$$

Merk verder op dat

$$\begin{aligned}DE^2GZ^2 &= \frac{\Delta LDB}{\Delta ADG} DZ^2GZ^2 = \Delta LDB \Delta ADG \\ DZ^2BE^2 &= \frac{\Delta LDB}{\Delta ADG} DZ^2GZ^2 = \Delta LDB \Delta ADG\end{aligned}$$

Met gebruik van 1.(ii) geeft dit

$$(DZ^2 - DE^2)(GZ^2 - BE^2) = (\Delta ADG - \Delta LDB)^2 = \Delta ABG^2$$

(iii) Merk eerst op dat

$$DZ^2 + AZ^2 = DA^2 = DE^2 + AE^2$$

Kies $a = AG$, $b = AB$ en $c = BG$. We zien dat

$$BE = \frac{1}{2}(AB - AL) = \frac{1}{2}(AB - BG) = \frac{1}{2}(b - c)$$

[1] Dit is een uitwerking van Gijs Heuts

Verder geldt $AE = b - \frac{1}{2}(b-c) = \frac{b+c}{2}$ en dus

$$DE^2 = DZ^2 + AZ^2 - AE^2 = DZ^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{(b+c)^2}{4}$$

Dit geeft gebruikmakend van 2(ii) dat

$$\begin{aligned} \Delta ABG^2 &= (DZ^2 - DE^2)(GZ^2 - BE^2) \\ &= \frac{1}{4}((b+c)^2 - a^2) \cdot \frac{1}{4}(a^2 - (b-c)^2) \\ &= \frac{1}{16}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \\ &= s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

3.
(i) Uit 1.(iii) weten we al dat $BDE \sim GDZ$. Omdat DGD_1A een koordenvierhoek is, geldt $\angle GD_1A = 180° - \angle GDA$, dus krijgen we

$$\angle GD_1Z = 90° - \angle GDZ = \angle DGZ$$

Omdat $\angle D_1GZ$ en $\angle GZD$ rechte hoeken zijn, volgt $GDZ \sim D_1GZ$. Het resultaat van opgave 1.(iii) toegepast op de driehoek AB_1G geeft $D_1GZ \sim D_1B_1E_1$.
(ii) Merk eerst op dat

$$AE_1^2 = AD_1^2 - D_1E_1^2 = GZ^2 + D_1Z^2 - D_1E_1^2$$

waar we hebben gebruikt dat $AD_1 = GD_1$. Analoog geldt $AE^2 = GZ^2 + DZ^2 - DE^2$. Dit geeft

$$\begin{aligned} (AE_1^2 - BE^2)(AE^2 - B_1E_1^2) &= (D_1Z^2 - D_1E_1^2 + GZ^2 - BE^2)(DZ^2 - DE^2 + GZ^2 - B_1E_1^2) \\ &= \Delta ABG^2 + \Delta AB_1G^2 + (D_1Z^2 - D_1E_1^2)(DZ^2 - DE^2) \\ &\quad +(GZ^2 - BE^2)(GZ^2 - B_1E_1^2) \end{aligned}$$

waar we het resultaat van opgave 2.(ii) hebben gebruikt voor de oppervlakten van ABG en AB_1G. De gelijkvormigheid van BDE en GDZ geeft

$$DZ^2 - DE^2 = DZ^2(1 - \frac{BE^2}{GZ^2}) = \frac{DZ^2}{GZ^2}(GZ^2 - BE^2) = \frac{DZ^2}{GZ^2}\frac{\Delta ABG^2}{DZ^2 - DE^2}$$

en dus

$$DZ^2 - DE^2 = \frac{DZ}{GZ}\Delta ABG$$

Wederom is hier 2.(ii) gebruikt. Op dezelfde manier is makkelijk af te leiden dat

$$GZ^2 - BE^2 = \frac{GZ}{DZ}\Delta ABG$$

Analoog vinden we

$$\begin{aligned} D_1Z^2 - D_1E_1^2 &= \frac{D_1Z}{GZ}\Delta AB_1G \\ GZ^2 - B_1E_1^2 &= \frac{GZ}{D_1Z}\Delta AB_1G \end{aligned}$$

Dit geeft nu

$$(D_1Z^2-D_1E_1^2)(DZ^2-DE^2)+(GZ^2-BE^2)(GZ^2-B_1E_1^2) = \Delta ABG\Delta AB_1G\left(\frac{DZ\cdot D_1Z}{GZ^2}+\frac{GZ^2}{DZ\cdot D_1Z}\right)$$

De stelling van Ptolemaeus toegepast op de koordenvierhoek $ADGD_1$ zegt ons dat

$$\begin{aligned} D_1D\cdot GA &= AD_1\cdot GD + AD\cdot GD_1 \\ \Rightarrow GZ(D_1Z+DZ) &= \sqrt{(D_1Z^2+GZ^2)(DZ^2+GZ^2)} \\ \Rightarrow 2GZ^2\cdot D_1Z\cdot DZ = D_1Z^2DZ^2+GZ^4 & \\ \Rightarrow \frac{DZ\cdot D_1Z}{GZ^2}+\frac{GZ^2}{DZ\cdot D_1Z} = 2 & \end{aligned}$$

We concluderen nu dat

$$\begin{aligned} (AE_1^2-BE^2)(AE^2-B_1E_1^2) &= \Delta ABG^2+\Delta AB_1G^2+2\Delta ABG\Delta AB_1G = (\Delta ABG+\Delta AB_1G)^2 \\ &= [ABGB_1]^2 \end{aligned}$$

(iii) We kiezen de notatie $a = AB$, $b = BG$, $c = GB_1$, $d = B_1A$. Er geldt dan dat

$$\begin{aligned} AE &= a-\frac{1}{2}(a-b) = \frac{a+b}{2} \\ BE &= \frac{a-b}{2} \\ AE_1 &= \frac{c+d}{2} \\ B_1E_1 &= \frac{d-c}{2} \end{aligned}$$

Nu vinden we

$$\begin{aligned} [ABGB_1]^2 &= (AE^2-B_1E_1^2)(AE_1^2-BE^2) \\ &= \frac{1}{16}((a+b)^2-(d-c)^2)((c+d)^2-(a-b)^2) \\ &= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) \\ &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \end{aligned}$$

KNAW

4. Geen differentiaalvergelijking

G.J. Woeginger, Technische Universiteit Eindhoven

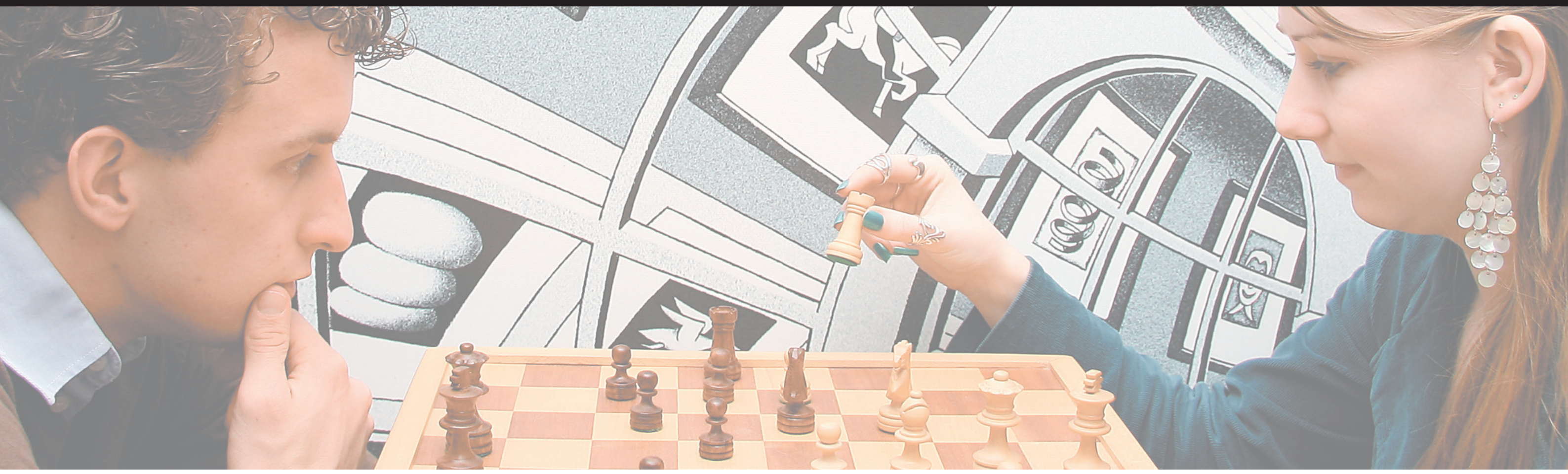
Definieer de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g(x) = x^2(1-x)^2 f(x)$. Omdat $g(0) = g(1) = 0$, geeft de stelling van Rolle een $x \in (0,1)$ met $g'(x) = 0$. Dan

$$0 = g'(x) = (2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x))f(x) + x^2(1-x)^2 f'(x)$$

Delen door $x^2(1-x)^2$ geeft de gewenste gelijkheid.

Faculty of Science

Knap staaltje denkwerk



Weet jij al wat je na je bachelor gaat doen? Wil jij...

...onderdeel uitmaken van een toonaangevende onderzoeksgroep?
...een internationaal netwerk opbouwen, bijvoorbeeld via het ‘ALGANT study program’?
...kennis maken met verschillende disciplines?
...zelf bepalen welke vakken je volgt?

Dan is een wiskunde master aan Universiteit Leiden iets voor jou!

Of je ambitie nu ligt bij een multinational in een internationale omgeving of je verdieping zoekt in een PhD program, in Leiden bieden wij je de mogelijkheid je kennis verder te verdiepen in een persoonlijke en inspirerende omgeving. Kies je programma op maat binnen één van de tracks en na je master in Leiden ligt de wereld aan je voeten!

www.mastersinleiden.nl

Universiteit Leiden

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

5. Dubbele machten

H.W. Lenstra, Universiteit Leiden

Kies positieve gehele getallen w en x met $wu = 1 \mod v$ en $xv = 1 \mod u$, en definieer de gehele getallen y, z door $wu = 1 + yv$, $xv = 1 + zu$, zodat y, z niet-negatief zijn. De positieve gehele getallen $n = u^w \cdot v^z$, $m = u^y \cdot v^x$ voldoen nu aan $v \cdot n^u = u^{wu} \cdot v^{1+zu} = u^{1+yv} \cdot v^{xv} = u \cdot m^v$ dus met $a = 2^v$ en $b = 2^u$ vinden we $a^{n^u} = 2^{v \cdot n^u} = 2^{u \cdot m^v} = b^{m^v}$, terwijl ook geldt $a^u = 2^{uv} = b^v$, en $a > 1, b > 1$.

6. Van cirkels naar hyperbolen onder behoud van oppervlakte

J.A.C. Kolk, Universiteit Utrecht

Definieer

$$U = \bigcup_{r>0} C_{r,\pi}, \qquad V = \bigcup_{r>0} H_{r,\pi};$$

dan geldt

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}), \qquad V = \{\, x \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \mid |x_2| < x_1 \tanh \pi \,\}. \tag{$\star$}$$

Immers, de gelijkheid voor U in $(\star)$ is bekend uit de theorie van poolcoördinaten en de inclusie van V in de laatstgenoemde verzameling, zeg W, in $(\star)$ is evident. Omgekeerd, veronderstel nu $x \in W$. Uit $\tanh \pi < 1$ volgt dan $|x_2| < x_1$; bijgevolg $r = (x_1^2 - x_2^2)^{1/2} > 0$. Verder geldt $-\tanh \pi < \frac{x_2}{x_1} < \tanh \pi$, en vanwege de continuïteit en strikte monotonie van tanh bestaat dan een uniek element $\alpha \in \,]-\pi, \pi[\,$ met $\frac{x_2}{x_1} = \tanh \alpha$. Dan volgt uit $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ dat $x = r(\cosh \alpha, \sinh \alpha) \in V$.

Teneinde het bestaan van Φ aan te tonen, introduceer

$$D = \mathbb{R}_{>0} \times \,]-\pi, \pi[\, \subset \mathbb{R}^2, \qquad \Psi_+ : D \to U, \qquad \Psi_- : D \to V,$$

$$\Psi_+(r, \alpha) = r\,(\cos \alpha, \sin \alpha), \qquad \Psi_-(r, \alpha) = r\,(\cosh \alpha, \sinh \alpha).$$

Dan is Ψ_+ het diffeomorfisme bekend van de overgang naar poolcoördinaten in $\mathbb{R}^2$, waarvoor geldt $\det D\Psi_+(r, \alpha) = r$. Bijgevolg is ${\Psi_+}^{-1} : U \to D$ ook een diffeomorfisme, terwijl $\det D{\Psi_+}^{-1}(r(\cos \alpha, \sin \alpha)) = \frac{1}{r}$ op grond van de kettingregel en de multiplicatieve eigenschap van de determinant.

De argumenten uit de eerste alinea van dit antwoord leiden tot de bijectiviteit van Ψ_-, terwijl de continue differentieerbaarheid ervan duidelijk is. Verder geldt $\det D\Psi_-(r, \alpha) = r > 0$, en dus is ${\Psi_-}^{-1}$ een diffeomorfisme op grond van de Globale Inverse-functiestelling. Derhalve is ook de samengestelde afbeelding

$$\Phi = \Psi_- \circ {\Psi_+}^{-1} : U \to V \quad \text{met} \quad r(\cos \alpha, \sin \alpha) \mapsto (r, \alpha) \mapsto r(\cosh \alpha, \sinh \alpha)$$

een diffeomorfisme, terwijl de identiteit $\Phi(C_{r,\alpha}) = H_{r,\alpha}$ evident is. Voorts geldt

$$\det D\Phi(r(\cos(\alpha, \sin \alpha)) = \det D\Psi_-(r, \alpha)\ \det D{\Psi_+}^{-1}(r(\cos \alpha, \sin \alpha)) = r\,\frac{1}{r} = 1.$$

De Substitutiestelling voor dubbelintegralen impliceert nu dat Φ oppervlaktebehoudend is, en alle beweringen zijn nu geverifieerd.

Opmerking: In het voorgaande zijn Cartesische coördinaten in $\mathbb{R}^2$ zo weinig mogelijk gebruikt. Deze kunnen echter ook maximaal worden benut, onder vermijding van pool- en hyperbolische coördinaten. Bijvoorbeeld, voor een bewijs in Cartesische coördinaten dat Φ volumebehoudend is, introduceer

$$a : U \to \mathbb{R} \text{ en } h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{door}$$

$$a(x) = 2 \arctan\left(\frac{x_2}{\|x\| + x_1}\right), \qquad h = \begin{pmatrix} \cosh \\ \sinh \end{pmatrix},$$

$$\text{dan} \qquad \Phi = \|\cdot\|\,(h \circ a) : U \to V, \text{d.w.z.}\,\Phi(x) = \|x\| \begin{pmatrix} \cosh a(x) \\ \sinh a(x) \end{pmatrix}.$$

Indien de rijvector x^t de getransponeerde van de kolomvector $x \in U$ aanduidt, dan geven

$$D\|\cdot\|(x) = \frac{1}{\|x\|}\, x^t, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Da(x) = \frac{1}{\|x\|^2}\,(Jx)^t$$

dat

$$\begin{aligned} D\Phi(x) &= \tfrac{1}{\|x\|}\,(h\circ a(x))\,x^t + \tfrac{1}{\|x\|}\,(h'\circ a(x))\,(Jx)^t \\ &= \tfrac{1}{\|x\|}\begin{pmatrix} x_1\cosh a(x) - x_2\sinh a(x) & x_1\sinh a(x) + x_2\cosh a(x) \\ x_1\sinh a(x) - x_2\cosh a(x) & x_1\cosh a(x) + x_2\sinh a(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Derhalve $\det D\Phi(x) = 1$, en daarom is $\Phi : U \to V$ volumebehoudend.

Achtergrond: Een meetkundige betekenis van het getal $0 < \alpha \le \pi$ in $x_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ is de **lengte** van de boog van de eenheidscirkel $x_1^2 + x_2^2 = 1$ tussen x_0 en x_α. De overeenkomstige interpretatie geldt echter niet indien men x_α vervangt door $y_\alpha = (\cosh\alpha, \sinh\alpha)$ behorend tot de rechter tak van de eenheidshyperbool $y_1^2 - y_2^2 = 1$. Zonder bewijs wordt hier vermeld dat de lengte van zo een boog van de hyperbool wordt gegeven door een niet-elementaire transcendente functie van α. Daarentegen geldt wel dat α de **oppervlakte** is van zowel de cirkelsector bepaald door $x_{-\alpha}$ en x_α, als de hyperboolsector bepaald door $y_{-\alpha}$ en y_α. Dit laatste feit volgt direct uit de eigenschappen van het diffeomorfisme Φ.

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam.
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

For master- and Ph.D.-students the Stieltjes Institute organises each year a Stieltjesweek about a central theme in mathematics. Faculty members of the different universities present the lectures about such a new theme. Each Stieltjes phd-student receives a contribution of 250 euro in the printing costs of the thesis.
Each year a Stieltjes Prize is presented for the best Stieltjes thesis and the winner receives an amount of 1200 euro.

http://www.stieltjes.org/
stieltjes@math.leidenuniv.nl
+31 71 527 7042

CHOOSE YOUR MASTER IN TWENTE!

MASTER
APPLIED MATHEMATICS

TRACKS:

- MATHEMATICAL PHYSICS AND COMPUTATIONAL MECHANICS
- FINANCIAL ENGINEERING
- INDUSTRIAL ENGINEERING AND OPERATIONS RESEARCH
- SYSTEMS AND CONTROL

3TU MASTER
SYSTEMS & CONTROL

WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/AM

WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/SC

UNIVERSITEIT TWENTE.

7. Een bijna-injectieve functie

B. van Dalen, Universiteit Leiden

We onderzoeken eerst voor welke drietallen (a, b, c) van gehele getallen geldt dat f niet injectief is op (a, b, c). Daarna kunnen we beide vragen gemakkelijk beantwoorden.

Stel (x, y, z) en (u, v, w) zijn twee verschillende drietallen met dezelfde functiewaarde (a, b, c). Dan geldt

$$x^2 + y = a = u^2 + v, \qquad y^2 + z = b = v^2 + w, \qquad z^2 + x = c = w^2 + u.$$

Hieruit volgt

$$x^2 - u^2 = v - y, \qquad y^2 - v^2 = w - z, \qquad z^2 - w^2 = u - x,$$

oftewel

$$(x + u)(x - u) = v - y, \qquad (y + v)(y - v) = w - z, \qquad (z + w)(z - w) = u - x. \qquad (*)$$

Dit betekent dat

$$(z + w)(y + v)(x + u)(x - u) = (z + w)(y + v)(v - y) = (z + w)(z - w) = u - x$$

en analoog

$$(z + w)(y + v)(x + u)(y - v) = v - y, \qquad \text{en} \qquad (z + w)(y + v)(x + u)(z - w) = w - z.$$

Omdat ten minste één van $x - u$, $y - v$ en $z - w$ ongelijk aan 0 is, betekent dit $(z + w)(y + v)(x + u) = -1$. Links staan drie gehele getallen, die dus allemaal gelijk aan 1 of -1 moeten zijn. Ten minste één van de drie, zeg $x + u$, is -1. We hebben nu twee gevallen: $z + w$ en $y + v$ zijn beide -1, of $z + w$ en $y + v$ zijn beide 1.

Geval 1. Stel $z + w = y + v = -1$. Dan geldt $x - u = y - v = z - w$ wegens $(*)$. We kunnen alles nu in x uitdrukken. Er geldt $u = -1 - x$, dus $z - w = x - u = 2x + 1$. Samen met $z + w = -1$ geeft dit $z = x$ en $w = -x - 1$. Zo ook geldt $y = x$ en $v = -x - 1$. Al met al vinden we $(x, y, z) = (x, x, x)$ en $(u, v, w) = (-x - 1, -x - 1, -x - 1)$. Er geldt $(a, b, c) = f(x, y, z) = (x^2 + x, x^2 + x, x^2 + x)$.

Geval 2. Stel $z + w = y + v = 1$. Dan geldt $x - u = y - v = w - z$ wegens $(*)$. We kunnen alles nu in x uitdrukken. Er geldt $u = -1 - x$, dus $z - w = u - x = -2x - 1$. Samen met $z + w = 1$ geeft dit $z = -x$ en $w = x + 1$. Zo ook geldt $v = -x$ en $y = x + 1$. Al met al vinden we $(x, y, z) = (x, x + 1, -x)$ en $(u, v, w) = (-x - 1, -x, x + 1)$. Er geldt $(a, b, c) = f(x, y, z) = (x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x^2 + x)$.

Al met al hebben we nu gezien dat als f niet injectief is op (a, b, c), er een x is zodat (a, b, c) gelijk is aan één van de drietallen $(x^2 + x, x^2 + x, x^2 + x)$, $(x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x^2 + x)$, $(x^2 + x + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1)$ en $(x^2 + x, x^2 + x + 1, x^2 + x + 1)$. Andersom hebben we voor elk van deze drietallen twee verschillende drietallen gevonden die erop afgebeeld worden, dus f is dan ook echt niet injectief op (a, b, c). Met behulp van dit resultaat kunnen we de vragen beantwoorden.

1. We zien dat als (a, b, c) een drietal gehele getallen is zodat f niet injectief is op (a, b, c), dat dan ten minste twee van a, b en c gelijk aan elkaar zijn. Andersom geldt dus dat als a, b en c alledrie verschillend zijn, f injectief is op (a, b, c).

2. Voor alle drietallen $(a, b, c) = (x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x^2 + x)$ met $x \in \mathbb{Z}$ geldt dat f niet injectief is op (a, b, c). Dit zijn oneindig veel drietallen en voor elk drietal geldt $b \neq c$.

UNIVERSITY OF AMSTERDAM

Mathematics MSc programmes

- Mathematical Physics
- Mathematics
- Stochastics and Financial Mathematics

www.uva.nl/science-masters

8. AlleMachtig!

L.D. Molag, Universiteit Utrecht

Uitwerking 1

Beschouw n complexe getallen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Er bestaan complexe getallen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ zó dat $(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$. We zullen per inductie de volgende uitspraak bewijzen:

Zij l een geheel getal met $1 \leq l \leq n$. Er geldt voor alle $1 \leq k \leq l$ dat $z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k = 0$ als en slechts als voor alle $1 \leq k \leq l$ geldt dat $a_{n-k} = 0$.

Voor $l = 1$ is de uitspraak triviaal want $a_{n-1} = -(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$. Neem nu aan dat de uitspraak waar is voor $l-1$ met $1 \leq l \leq n$. Stel dat voor alle $1 \leq k < l$ geldt dat $a_{n-k} = 0$ (of equivalent $z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k = 0$). Schrijf $\zeta_l = e^{\frac{2\pi i}{l}}$. We weten dat $z^l - z_j^l$ precies de nulpunten $\zeta_l^m z_j$ met $1 \leq m \leq l$ heeft. We gebruiken dit om de volgende identiteit aan te tonen:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n}(z^l - z_j^l) &= \prod_{j=1}^{n}\prod_{m=1}^{l}(z - \zeta_l^m z_j) = \prod_{j=1}^{n}\zeta_l^{l(l+1)/2}\prod_{m=1}^{l}(\zeta_l^{-m}z - z_j)\\
&= \zeta_l^{l(l+1)n/2}\prod_{m=1}^{l}\prod_{j=1}^{n}(\zeta_l^{-m}z - z_j)\\
&= \zeta^{l(l+1)n/2}\prod_{m=1}^{l}(\zeta_l^{-mn}z^n + a_{n-l}\zeta_l^{-m(n-l)}z^{n-l} + \ldots + a_0)\\
&= z^{ln} + la_{n-l}z^{l(n-1)} + \ldots + \zeta^{l(l+1)n/2}a_0^l
\end{aligned}$$

In de derde regel is gebruik gemaakt van de inductiehypothese. De coefficiënt van $z^{l(n-1)}$ in deze uitdrukking is $-(z_1^l + z_2^l + \ldots + z_n^l)$, dus $a_{n-l} = 0$ als en slechts als $z_1^l + z_2^l + \ldots + z_n^l = 0$. De uitspraak is dus bewezen.

Voor het geval $l = n - 1$ zegt de uitspraak dat er een $w \in \mathbb{C}$ bestaat zó dat $(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = z^n - w^n$, hetgeen impliceert dat $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = w(\zeta_n, \zeta_n^2, \ldots, \zeta_n^n)$.

Opmerking: Uit bovenstaande uitwerking maken we op dat het eigenlijk niet zo belangrijk is dat we werken met complexe getallen, maar dat we werken in een ring waarin elk element n verschillende n-de machtswortels heeft.

Uitwerking 2
Zij $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \neq 0 \in \mathbb{C}^n$. Zonder verlies van algemeenheid geldt $z_1, \ldots, z_m \neq 0$ en $z_j = 0$ voor $j > m$ voor zekere $1 \leq m \leq n$. Door gebruik te maken van de meetkundige reeks zien we dat

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{z - z_j^{-1}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} z_j^{k+1} \right) z^k = z^{n-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{z_j^{n-1}}{z - z_j^{-1}}$$

voor $|z|$ klein genoeg. Dit impliceert dat

$$\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1, i\neq j}^{m} (z - z_j^{-1}) = z^{n-1} \sum_{j=1}^{m} z_j^{n-1} \prod_{i=1, i\neq j}^{m} (z - z_j^{-1})$$

Het polynoom in het linker lid heeft graad $m-1$, hetgeen impliceert dat het polynoom in het rechterlid niet identiek nul kan zijn. Dan is het polynoom in het rechter lid dus van graad groter dan of gelijk aan $n-1$. Aangezien $m - 1 \leq n - 1$ moeten we aannemen dat $m = n$. We concluderen dat het polynoom gelijk is aan nz^{n-1}. Er geldt dus

$$\frac{d}{dz} \prod_{j=1}^{n} (z - z_j^{-1}) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1, i\neq j}^{n} (z - z_j^{-1}) = nz^{n-1}.$$

Dus bestaat er een complex getal $w \neq 0$ zó dat

$$\prod_{j=1}^{n} (z - z_j^{-1}) = z^n - w^{-n}.$$

Dit impliceert dat $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = w(\zeta_n, \zeta_n^2, \ldots, \zeta_n^n)$, waar $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Dit is inderdaad een oplossing, voor alle $1 \leq k < n$ geldt namelijk

$$z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k = w^k(\zeta_n^k + \zeta_n^{2k} + \ldots + \zeta_n^{nk}) = w^k \zeta_n^k \frac{\zeta_n^{kn} - 1}{\zeta_n^k - 1} = 0.$$

9. Bijzondere polynomen

A. Smeets, Katholieke Universiteit Leuven

Een dergelijk polynoom bestaat voor oneven waarden van n, maar niet voor even waarden van n. Het antwoord is negatief voor even n omdat het linkerlid van de bovenstaande gelijkheid dan invariant is onder de substitutie $a \mapsto -\frac{1}{a}$, maar het rechterlid niet. Veronderstel dus vanaf nu dat n oneven is.

We bewijzen per inductie op j dat er voor elke oneven j een polynoom $p_j(X) \in \mathbb{Z}[X]$ bestaat zodat

$$p_j\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^j - \frac{1}{a^j} \quad \text{voor alle } a \in \mathbb{R} \text{ met } a \neq 0.$$

Inderdaad, neem $p_1(X) = X$ en $p_3(X) = X^3 + 3X$ en construeer $p_{j+4}(X)$ uit $p_j(X)$ en $p_{j+2}(X)$ door middel van de recursierelatie $p_{j+4}(X) = (X^2+2) \cdot p_{j+2}(X) - p_j(X)$. Uit de identiteit

$$\left(\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2\right)\left(a^{j+2} - \frac{1}{a^{j+2}}\right) - \left(a^j - \frac{1}{a^j}\right) = a^{j+4} - \frac{1}{a^{j+4}}$$

volgt dan het resultaat (want de polynomen $p_j(X)$ hebben gehele coëfficiënten per constructie).

Schets van een alternatieve oplossing

Oplossen van $t = a - \frac{1}{a}$ naar a geeft $a = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{t^2+4})$. We willen dan bijvoorbeeld bewijzen dat

$$\left(\frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2}\right)^{-n}$$

een veelterm in t met gehele coëfficiënten is wanneer n oneven is. Maar deze uitdrukking is gelijk aan

$$\left(\frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2}\right)^n + \left(\frac{t - \sqrt{t^2+4}}{2}\right)^n,$$

precies omdat n oneven is. Uit de bekende hoofdstelling voor symmetrische polynomen over $\mathbb{Z}$ volgt dat deze laatste uitdrukking kan worden geschreven als polynoom met *gehele* coëfficiënten in de elementaire symmetrische uitdrukkingen $\frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2+4}) + \frac{1}{2}(t-\sqrt{t^2+4}) = t$ en $\frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2+4}) \cdot \frac{1}{2}(t-\sqrt{t^2+4}) = -1$. Daaruit volgt opnieuw het resultaat.

10. Nilpotente matrix

J. Top, Rijksuniversiteit Groningen

Uitwerking 1: Neem k geheel en positief, en definieer de $k \times k$ matrix $B := (b_{i,j})$ over de polynoomring $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\lambda]$ door $b_{i,j} = \lambda = -\lambda$ als $i = j$ en $b_{i,j} = 1$ als $|i - j| = 1$ en $b_{i,j} = 0$ als $|i - j| > 1$. Schrijf $d_k(\lambda) := \det(B)$. Door te ontwikkelen naar de eerste rij zie je dat $d_k(\lambda) = \lambda d_{k-1}(\lambda) + d_{k-2}(\lambda)$. Verder is $d_1(\lambda) = \lambda$ en $d_2(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Hiermee is een formule voor $d_k(\lambda)$ te vinden: in de ring $R := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(\lambda)[x]/(x^2 + \lambda x + 1)$ geldt $-a = a$ en $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ voor alle a, b, en ook $x^2 = \lambda x + 1$. Daaruit volgt

$$d_k(\lambda) = (1 + \frac{\lambda + x}{\lambda})x^k + (1 + \frac{x}{\lambda})(\lambda + x)^k,$$

zoals eenvoudig met volledige inductie is na te gaan. Vullen we $k = n = 2^m - 1$ in, dan volgt $d_n(\lambda) = \lambda^n$. In het bijzonder betekent dit, dat de matrix A uit deze opgave het eigenwaardenpolynoom λ^n heeft. De Cayley-Hamilton stelling zegt dat elke vierkante matrix een nulpunt is van zijn eigenwaardenpolynoom, dus $A^n = 0$.

Uitwerking[2] **2:** Definieer de matrix $B \equiv A - \lambda\mathbb{I} \equiv A + \lambda\mathbb{I}$. We zullen met inductie bewijzen dat $\det B \equiv \lambda^n$, de Cayley-Hamilton stelling impliceert dan dat $A^n \equiv 0$. Voor $m = 1$ is de uitspraak triviaal. Neem aan dat de uitspraak waar is voor een $m \geq 1$. Beschouw nu A voor $n = 2^{m+1} - 1$. Noteer met S_n de verzameling van bijecties van $\{1, 2, ..., n\}$ naar zichzelf. Omdat optellen en aftrekken equivalent zijn in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ geldt

$$\det B \equiv \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} B_{i,\sigma(i)}$$

Zij σ een bijectie met $\sigma(2^m) \neq 2^m$ en $B_{1,\sigma(1)} B_{2,\sigma(2)} \cdots B_{n,\sigma(n)} \neq 0$. Dit impliceert dat $\sigma(2^m) = 2^m - 1$ óf $\sigma(2^m) = 2^m + 1$. Neem aan dat $\sigma(2^m) = 2^m - 1$. Aangezien $\sigma(k) \leq k + 1$ voor alle k moeten we concluderen dat $\sigma(2^m - 1) = 2^m$ (doen we dit niet dan zal $\{\sigma(1), ..., \sigma(2^m - 1)\} \subset \{1, ..., 2^m - 2\}$). Analoog geldt $\sigma(2^m + 1) = 2^m$ als $\sigma(2^m) = 2^m + 1$. Stel nu σ voor als een matrix Σ met $\Sigma_{i,j} = 1$ als $j = \sigma(i)$ en 0 anders. Laat σ^T de bijectie zijn die hoort bij de matrix die je krijgt door Σ te spiegelen in de anti-diagonaal. We zien dat er voor elke σ met $\sigma(2^m) = 2^m - 1$ geldt dat $\sigma^T(2^m) = 2^m + 1$ en $B_{1,\sigma(1)} B_{2,\sigma(2)} \cdots B_{n,\sigma(n)} = B_{1,\sigma^T(1)} B_{2,\sigma^T(2)} \cdots B_{n,\sigma^T(n)}$. We merken op dat de afbeelding $\sigma \mapsto \sigma^T$ een bijectie is. Er geldt dus:

$$\sum_{\sigma \in S_n, \sigma(2^m) \neq 2^m} \prod_{i=1}^{n} B_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(2^m) = 2^m - 1} 2 \prod_{i=1}^{n} B_{i,\sigma(i)} \equiv 0$$

Beschouw nú een bijectie met $\sigma(2^m) = 2^m$ en $B_{1,\sigma(1)} B_{2,\sigma(2)} \cdots B_{n,\sigma(n)} \neq 0$. Stel dat $\{\sigma(1), ..., \sigma(2^m - 1)\} \neq \{1, ..., 2^m - 1\}$. Weer gebruikmakend van het feit dat $\sigma(k) \leq k + 1$ voor alle k impliceert dit $\sigma(2^m - 1) = 2^m$ en dit is in strijd met de bijectiviteit van σ. Dus $\{\sigma(1), ..., \sigma(2^m - 1)\} = \{1, ..., 2^m - 1\}$ en analoog $\{\sigma(2^m + 1), ..., \sigma(2^{m+1} - 1)\} = \{2^m + 1, ..., 2^{m+1} - 1\}$. De inductiehypothese rond het bewijs nu af:

$$\sum_{\sigma \in S_n, \sigma(2^m) = 2^m} \prod_{i=1}^{n} B_{i,\sigma(i)} \equiv B_{2^m, 2^m} \left(\sum_{\sigma \in S_{2^m - 1}} \prod_{i=1}^{2^m - 1} B_{i,\sigma(i)} \right)^2 \equiv \lambda(\lambda^{2^m - 1})^2 \equiv \lambda^n.$$

[2]Dit is een uitwerking van Leslie Molag

More Information

Klaas Landsman
landsman@math.ru.nl
www.ru.nl/master

Mathematics (MSc)

MASTER'S PROGRAMME

The department
The department

The Mathematics department currently has 14 staff members and a fluctuating population of about 10 PhD students and postdocs. This relatively small size has considerable advantages for students. You will not drown in a large student pool, and contact with staff and fellow students is pleasant and very easy to make. We take a highly personal approach! The combination of local courses and lectures offered by the national Dutch Master Program in Mathematics guarantees a broad and high-level range of topics to choose from.

Career prospects
Career prospects

Practically all of our graduates find employment immediately after graduating, in a very wide range of jobs including business, academia, government and ICT.

Research topics
Research topics

Our Master's programme is closely related to the research carried out in the Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics *(IMAPP)*, and in addition there are close research ties with the institute for Computing and Information Sciences (iCIS) and the Donders Centre for Neuroscience (DCN) at the Radboud University. Our research is embedded in the national mathematics clusters DIAMANT (websites.math.leidenuniv.nl/diamant/), GQT (www.gqt.nl) and STAR (www.eurandom.tue.nl/STAR/) As is often the case the research topics are linked to individuals. We invite you to look at the website **www.ru.nl/science/math**, where you can find more information.

You can choose from the following specializations:

• Algebra and Logic
Lattice-ordered algebras, topological dualities, algebraic logic, computer algebra in its many forms, affine algebraic geometry, intuitionistic and constructive mathematics. Furthermore, in collaboration with iCIS we offer an exciting interdisciplinary programme in the mathematical foundations of computer science.

• Mathematical Physics
Representation theory, symplectic geometry, integrable systems, special functions, and particle physics, topos theory, mathematical foundations of quantum theory, quantum probability, quantum computing, quantum field theory, quantum groups.

• Applied Stochastics
Interacting stochastic systems, i.e. systems consisting of a large number of interacting and stochastically evolving components, with applications to statistical physics (gases and liquids), biology (population dynamics) and neuroscience (self-organized criticality in brain activity, random graph theory, cortical networks).

Personal tutor for a tailor-made programme

Our Master's programme offers you considerable freedom to follow your own interests, at least within the range of our expertise. At the beginning of the two-year program, you declare your area of specialization and choose a personal tutor within that area, with whom you decide what your precise research area and package of courses at both the local and the national level will be. In the second year, most of your time will be spent on your MSc dissertation in the research area of your choice. In short, you will be able to develop a tailor-made programme.

11. Muntje Over

S. Boersma, Universiteit Utrecht

1. Beschouw het geval van $n+1$ munten in een cirkel ($n \geq 3$). Voer de eerste zet uit. We hebben nu een cirkel met $n-1$ stapels van één munt en één stapel van twee munten. Vanaf nu is het verder uitvoeren van het proces equivalent aan het geval met n munten op een cirkel, met als enige verschil dat er één munt vervangen is door een stapel. Voor het proces worden deze echter hetzelfde behandeld. Indien het stapeltje met twee munten belandt in de grootste stapel, liggen er a_n munten op de laagste stapel, anders $a_n + 1$. Als voor zekere n de grootste en kleinste stapel aan het einde even groot waren, geldt $a_{n+1} = a_n$.

2. Gegeven een cirkel met stapels van munten, we zeggen dat die cirkel m-periodiek is als geldt dat elke twee stapels waar exact $m-1$ stapels tussen liggen, even hoog zijn. De rij van stapelhoogtes repeteert dus met periode m en zo'n rij van m opeenvolgende stapelhoogtes noemen we een m-combinatie. Noteer met $C(n;m)$ de cirkel die is ontstaan door $n-m$ zetten uit te voeren op de cirkel met n munten (er zijn dan dus m stapels).

Lemma: *Zij $0 \leq k \leq n$. $C(3^n; 2^k 3^{n-k})$ is 2^k-periodiek.*
Bewijs: Voor $k=0$ en $k=n$ is dit duidelijk. Voor de overige k gaan we inductie toepassen. Stel dat het waar is voor zekere k met $k+1 < n$. $C(3^n; 2^{k+1}3^{n-k-1})$ is de cirkel die we krijgen door nog $2^k \cdot 3^{n-k-1}$ zetten uit te voeren op $C(3^n; 2^k 3^{n-k})$. Volgens de inductiehypothese is $C(3^n; 2^k 3^{n-k})$ 2^k-periodiek. Voer nu 2^k zetten uit op $C(3^n; 2^k 3^{n-k})$, dit heeft effect op de eerste $3 \cdot 2^k$ stapels van $C(3^n; 2^k 3^{n-k})$. Omdat $3 \cdot 2^k$ deelbaar is door 2^k is het duidelijk dat de combinatie van de eerste opeenvolgende 2^{k+1} stapels in de nu ontstane cirkel weer bij de daaropvolgende 2^{k+1} stapels ontstaat door de volgende 2^k zetten uit te voeren. Na dat we dit 3^{n-k-1} keer hebben uitgevoerd krijgen we $C(3^n; 2^{k+1}3^{n-k-1})$ en die cirkel is dus 2^{k+1}-periodiek. $\square$

Lemma: *Zij $0 \leq k \leq n$. Elke 2^k-combinatie van $C(3^n; 2^k 3^{n-k})$ bevat precies één stapel met slechts één munt.*
Bewijs: Voor $k=0$ is dit duidelijk. Stel dat dit waar is voor k met $k < n$. Een nieuwe 2^{k+1}-combinatie ontstaat door 2^k zetten uit te voeren op drie opeenvolgende 2^k-combinaties van $C(3^n; 2^k 3^{n-k})$. Beschouw de situatie net vóór we deze 2^k zetten gaan uitvoeren; de stapel waarmee je straks de eerste zet gaat uitvoeren heeft plaats 1, de stapel direct rechts daarvan plaats 2, enzovoorts. De stapels wiens plaats 1 mod 3 is worden in dit proces geplaats op een andere stapel. De stapels wiens plaats 0 mod 3 is krijgen een stapel op hen geplaatst. We concluderen dat de stapels wiens plaats 2 mod 3 is onveranderd blijven na de 2^k zetten. In de nieuwe situatie zijn enkel stapels van slechts één munt indien die in dit proces zijn overgeslagen. Vanwege de inductiehypothese zijn er precies 3 enen in de drie opeenvolgende 2^k-combinaties. Deze hebben plaats $m, 2^k+m$ en $2 \cdot 2^k + m$ voor een $1 \leq m \leq 2^k$. Echter, $2^k \equiv \pm 1 \mod 3$ en dus $2 \cdot 2^k \equiv \mp 1 \mod 3$. Dit impliceert dat $m, 2^k+m$ en $2 \cdot 2^k + m$ allen in verschillende modulo klassen zitten. Dus met precies één van de stapels van één munt gebeurt niets, de anderen worden op een stapel gelegd of komen onder een stapel te liggen. Na de 2^k zetten is er dus precies één stapel met slechts één munt overgebleven. $\square$

Neem nu $n \geq 3$ en beschouw $C(3^n; 2^n)$. Volgens wat we zojuist hebben bewezen komt er in deze 2^n-periodieke combinatie precies één stapel van slechts één munt voor. Voor de laatste $2^n - 2$ stappen kunnen we kijken naar de cirkel met 2^n munten. Doordat stapels hetzelfde worden behandeld als munten geldt dat er nu a_{2^n} respectievelijk $2^n - a_{2^n}$ stapels van $C(3^n; 2^n)$ op de twee stapels van $C(3^n; 2)$ komen te liggen. Aangezien de stapels van $C(3^n; 2^n)$ op één na meer dan één munt bevatten, liggen er op de laagste stapel van $C(3^n; 2)$ nu tenminste $2 \cdot a_{2^n} - 1$ munten, ofwel $a_{3^n} \geq 2 \cdot a_{2^n} - 1$.

Voor $n \geq 3$ geldt $2 \cdot a_{2^n} - 1 > a_{2^n}$ (want $a_8 = 3 \geq 2$) en dus onder andere $a_{2^{2n}} \geq a_{3^n} > a_{2^n}$. We concluderen dat de rij a_{2^n}, en dus de rij a_n, onbegrensd is. Aangezien uit het eerste deel van de opgave volgt dat de functie met stapjes van één stijgt, worden er geen getallen overgeslagen. Dus $\{a_n | n \geq 3\} = \mathbb{N}$.

ORTEC

Bij ORTEC zit je goed!

Bij ORTEC wordt wereldwijd gewerkt aan complexe optimalisatievraagstukken in diverse logistieke en financiële sectoren. Onze medewerkers helpen klanten gefundeerde beslissingen te nemen met gebruik van wiskundige modellen en het toepassen van simulatie- en optimalisatie-technieken.

ORTEC is een professionele, jonge organisatie met volop doorgroeimogelijkheden. Tijdens of na je studie kun je bij ons aan de slag. Je wordt direct op projecten ingezet en krijgt veel eigen verantwoordelijkheid. Wij bieden een werkomgeving met voldoende ruimte om je talenten te ontwikkelen binnen jouw interesse-gebied, zowel nationaal als internationaal.

Spreekt dit je aan en volg je een studie Econometrie, Operationele Research, Informatica of Wiskunde of heb je deze voltooid en heb je affiniteit met statistische modellen en de logistieke of financiële wereld, dan zit je bij ORTEC goed!

Vertel ons hoe jij je talent wilt inzetten voor de verbetering van onze producten en diensten en de verdere internationale groei van ORTEC.

Op onze website www.werkenbijortec.com vind je meer informatie over werken bij ORTEC en een actueel overzicht van vacatures en stage- of afstudeermogelijkheden. Zit jouw ideale functie of onderwerp er niet bij, stuur dan een open sollicitatie.

- ORTEC Logistics
  Groningenweg 6k
  2803 PV Gouda
  Tel.: 0182-540 500
  recruitment@ortec.com

- ORTEC Finance
  Max Euwelaan 78
  3062 MA Rotterdam
  Tel.: 010-498 66 66
  hr@ortec-finance.com

www.werkenbijortec.com

Internationale Wiskunde Olympiade 2011 in Nederland

De Internationale Wiskunde Olympiade is een prestigieuze wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Het is de oudste en grootste van de wetenschapsolympiades die internationaal worden georganiseerd. De 52e Internationale Wiskunde Olympiade zal van 12 tot 24 juli in Amsterdam worden gehouden. In totaal worden ongeveer 600 deelnemers uit meer dan 100 landen verwacht (en daarnaast nog een paar honderd begeleiders). De wedstrijd bestaat uit het oplossen van zes pittige wiskundeopgaven verdeeld over twee wedstrijddagen.

Vrijwilliger zijn bij het grootste internationale Wiskunde-evenement?

Word gids of wedstrijdbegeleider bij de International Mathematical Olympiad in 2011

Vrijwilligers nodig

Rond de wedstrijd worden excursies en activiteiten voor de internationale groep deelnemers georganiseerd. Ook is er een officiële opening- en sluitingsceremonie. De deelnemers zijn negen dagen in Nederland en worden vanaf hun aankomst tot vertrek begeleid door een gids van het organiserende land. Naast de in totaal 1.000 buitenlandse gasten nemen er ook zo'n 300 vrijwilligers aan het evenement deel, die ervoor zorgen dat alles goed loopt. Dit zal een onvergetelijke ervaring zijn. Wil jij ook je handen uit je mouwen steken in 2011?

Er zijn allerlei taken die door vrijwilligers tijdens de IMO worden verricht.

- De gidsen begeleiden elk een team van zes deelnemers uit één land en helpen hen met praktische zaken. Voor deze functie zijn we vooral op zoek naar studenten die hun buitenlandse talen goed spreken.
- De wedstrijdbegeleiders zorgen dat de wedstrijd vlekkeloos verloopt. Voor deze functie zijn we vooral op zoek naar docenten.
- De crewleden regelen alles op de accommodaties.
- De coördinatoren kijken het werk van de deelnemers na en stellen in overleg met de teamleiders de scores vast.

Meer informatie? Aanmelden voor een van de functies? Kijk op www.imo2011.nl.

IMO2011