LIMO 2012

Uitwerkingen

A-Eskwadraat

Hoofdsponsor

Transtrend

Overige sponsoren

Radboud Universiteit Nijmegen

Universiteit van Amsterdam

vrije Universiteit amsterdam

optiver

Katholieke Universiteit Leuven

Wiskunde onderzoekschool nederland
The Dutch Research School in Mathematics

KWG

Talent&Pro

Universiteit Utrecht

Universiteit Gent

Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen

KNAW

rijksuniversiteit groningen

Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Colofon
Dit opgavenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2012.
e-mail: limo1112@a-eskwadraat.nl
internet: www.limo.a-eskwadraat.nl

Regels en tips

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Verzamel het werk per opgave in het daarvoor bestemde mapje.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Voor drinken wordt tijdens de wedstrijd gezorgd. Er komt regelmatig iemand langs om vragen aan te kunnen stellen.

Tips die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is een definitie gegeven in een voetnoot. Verder wordt met $\mathbb{N}$ de verzameling van strikt positieve gehele getallen bedoeld, dat wil zeggen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven. Besteed dus gemiddeld meer tijd aan opgaven met lagere nummers.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bespreek ook vooraf waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk. Vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes**. Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen dat relevant kan zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moest worden, wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}$, probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor $n = 1$ of $n = 2$. Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

1. Grappige functie

L.D. Molag, Universiteit Utrecht

We noteren met $a_1 a_2 \cdots a_m \in \mathbb{N}$ een decimaal getal (dus $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ met $a_1 \neq 0$). Bijvoorbeeld, voor 215 geldt $(a_1, a_2, a_3) = (2, 1, 5)$. Met $b_1 < b_2 \cdots < b_n$ noteren we de verschillende cijfers die voorkomen onder $a_1, a_2, \ldots, a_m$. De functie $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wordt nu gedefinieerd door het voorschrift $T(a_1 a_2 \cdots a_m) = c_1 b_1 c_2 b_2 \cdots c_n b_n$, hier is c_i gelijk aan het aantal keer dat b_i voorkomt onder $a_1, a_2, \cdots, a_m$. Bijvoorbeeld, $T(4212) = 112214$ en $T(22) = 22$. Het getal 22 heeft dus de eigenschap dat het op zichzelf wordt afgebeeld door T.

(a) Toon aan dat er nog een getal bestaat met deze eigenschap.

(b) Toon aan dat elk getal ongelijk aan 22 dat deze eigenschap heeft het cijfer 1 bevat.

Uitwerking.

(a) Een dergelijk getal $c_1 b_1 \cdots c_n b_n$ vind je als volgt. We proberen een oplossing te vinden met $b_1 = 1$. Het is duidelijk dat $c_1 \neq 1$, laten we dus $c_1 = 2$ proberen, het volgende getal. Dan geldt $b_2 = 2$. Het is duidelijk dat $c_2 \neq 1, 2$ dus probeer $c_2 = 3$, hieruit volgt dat $b_3 = 3$. Het is duidelijk dat $c_3 \neq 1$, dus probeer $c_3 = 2$. We hebben nog één extra 1 nodig, wat we kunnen bereiken door $b_4 = 4$ en $c_4 = 1$ te kiezen. Dit geeft de oplossing 21322314. We hebben steeds het kleinst volgende getal gekozen voor c_i omdat $a_0 \ldots a_n$ anders al snel uit veel cijfers zou bestaan, doen we dit niet dan zouden we (waarschijnlijk) minder snel een getal vinden dat werkt. In dat opzicht is 10213223 eigenlijk een nog logischere oplossing.

Alternatieve oplossing: Voor mensen die van prutsen houden. We kunnen het rijtje $(T^n(1))_n$ beschouwen. We krijgen dan

$$1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213,$$
$$31121314, 41122314, 31221324, 21322314, 21322314, \ldots$$

We concluderen dus dat 21322314 een getal is met de gezochte eigenschap.

(b) Stel dat $c_1 b_1 \cdots c_n b_n$ een getal met de eigenschap is maar geen 1 bevat. Als dit getal niet 22 is dan geldt $n > 1$. Merk op dat $b_1 \neq 0$, want dat zou impliceren dat $c_1 = 1$. Hieruit volgt dat $b_i \geq i + 1$ voor $1 \leq i \leq n$. Er geldt $c_n > 1$ en dus komt het cijfer b_n nog een keer voor in het getal $c_1 b_1 \cdots c_n b_n$, wat betekent dat er een $1 \leq i \leq n - 1$ is zodanig dat $c_i = b_n$. Dit betekent dat het cijfer b_i in totaal $b_n \geq n + 1$ keer voorkomt in het getal $c_1 b_1 \cdots c_n b_n$. Omdat alle b_j verschillend zijn, concluderen we dat c_j gelijk moet zijn aan b_i voor alle $1 \leq j \leq n$. Dus $b_i = c_i = b_n$, een tegenspraak.

2. Droom van de Calculusstudent

F.J. van de Bult, Technische Universiteit Delft

In deze opgave werken we met functies $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ die beide minstens één keer continu differentieerbaar zijn. Voor de gemiddelde calculusstudent gelden soms heel simpele rekenregels, maar de werkelijkheid is vaak lastiger. Wij gaan verkennen wanneer deze regels toch gelden.

(a) Vind een niet-triviale oplossing van

$$(f + g)^2 = f^2 + g^2. \tag{2.1}$$

De triviale oplossingen zijn die oplossingen waar f, dan wel g, constant 0 zijn.

(b) Laat zien dat als (2.1) geldig is, dat dan ook

$$(fg)' = f'g' \tag{2.2}$$

geldt.

(c) Vind niet-triviale functies f en g die voldoen aan zowel (2.2) als aan

$$\int fg = \int f \int g. \tag{2.3}$$

Hier moet deze laatste vergelijking opgevat worden als "Een primitieve van f keer een primieve van g is gelijk aan een primitieve van fg".

(d) Bestaan er functies f en g die aan zowel (2.2) als (2.3) voldoen maar niet aan (2.1)?

Uitwerking.

(a) Er moet gelden dat $fg = 0$ overal, maar noch f noch g mag constant 0 zijn. Laten we dus maar een f kiezen die nul is op $[0, 1]$ en een g die nul is op $[-1, 0]$, terwijl ze daarbuiten niet nul zijn. Bijvoorbeeld

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}.$$

Merk op dat f en g continu differentieerbaar zijn, in het bijzonder ook in 0 (de afgeleide is daar 0).

(b) Laat $x \in [-1, 1]$. Merk eerst op dat als (2.1) geldt, we dan weten dat $f(x)g(x) = 0$, en dus is ook $(f(x)g(x))' = 0$. We weten dat ofwel $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$, en neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $f(x) = 0$. Stel dat $f'(x) \neq 0$, we laten nu zien dat $g'(x) = 0$. Omdat f continu differentieerbaar is, is er een open omgeving U van x in $[-1, 1]$ zodat f' niet nul is op U. Dit betekent dat f strikt monotoon is op U. Hieruit volgt dat $f(y) \neq 0$ voor $y \in U \setminus \{x\}$. Dus $g = 0$ op $U \setminus \{x\}$, en wegens continuïteit op heel U. Hieruit volgt dat $g'(x) = 0$. We concluderen dat $f'g' = 0 = (fg)'$.

Alternatieve oplossing: Merk eerst op dat als (2.1) geldt, we dan weten dat $f(x)g(x) = 0$, en dus is ook $(f(x)g(x))' = 0$. We moeten dus laten zien dat $f'(x)g'(x) = 0$ voor alle x, ofwel dat voor elke x geldt dat of $f'(x) = 0$ of $g'(x) = 0$.

We laten zien dat dit geldt in $x \in [-1, 1]$. Kies een rijtje x_n dat convergeert naar x en nergens de waarde x zelf aanneemt. Dan geldt voor elke x_n dat $f(x_n) = 0$ of $g(x_n) = 0$. Het ladenprincipe laat zien dat het of oneindig vaak voorkomt dat $f(x_n) = 0$, of oneindig vaak voorkomt dat $g(x_n) = 0$. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $f(x_n) = 0$ oneindig vaak voorkomt. We beperken de rij x_n nu tot een deelrij x_{n_k} waarvoor $f(x_{n_k}) = 0$ voor alle k. Wegens continuïteit geldt nu ook dat $f(x) = 0$. Dan zien we dat

$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(x)}{x_{n_k} - x} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

(De eerste gelijkheid geldt omdat we al weten dat f differentieerbaar is). In het bijzonder geldt dus in elk punt dat $f'(x) = 0$ of dat $g'(x) = 0$, zoals gewenst.

(c) We nemen hetzelfde voorbeeld als het eerste deel van de opgave, en kiezen als primitieves

$$\int f = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 & x \le 0 \\ 0 & x \ge 0 \end{cases}, \qquad \int g = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{3}x^3 & x \ge 0 \end{cases}, \qquad \int fg = 0.$$

(d) Ja, kies maar $f(x) = g(x) = e^{2x}$. Dan is $f'(x) = g'(x) = 2e^{2x}$ en $(fg)'(x) = 4e^{4x}$, dus (2.2) gaat goed. En $\int f = \int g = \frac{1}{2}e^{2x}$ en $\int fg = \int e^{4x} = \frac{1}{4}e^{4x}$, dus ook (2.3) gaat goed.

Je kunt ook afleiden wat de oplossing moet zijn. Schrijf $F = \int f$ en $G = \int g$ (dus $f = F'$ en $g = G'$). Bovendien nemen we aan dat $f(x) \neq 0$ en $g(x) \neq 0$ voor alle x (zodat we erdoor kunnen delen). Dan zijn de twee vergelijkingen die moeten gelden gelijk aan

$$(FG)' = fg, \qquad (fg)' = f'g',$$

ofwel

$$FG' + F'G = F'G', \qquad F''G' + F'G'' = F''G''.$$

Uit de tweede vergelijking volgt dat $G'' - G' \neq 0$, want anders geldt $G' = 0$ of $F' = 0$, maar dit hadden we uitgesloten. Deze vergelijkingen kunnen herschreven worden tot

$$F = F'\frac{G' - G}{G'}, \qquad F'' = F'\frac{G''}{G'' - G'}.$$

Differentieren we de eerste vergelijking en gebruiken we de tweede om de resulterende F'' weg te werken, krijgen we

$$F' = F''\frac{G' - G}{G'} + F'\frac{GG'' - G'^2}{G'^2} = F'\frac{G''(G' - G)}{G'(G'' - G')} + F'\frac{GG'' - G'^2}{G'^2}.$$

Delen door F' en vereenvoudigen levert de vergelijking

$$(2G' - G'')(GG'' - G'^2) = 0$$

op. In het eerste geval zien we dat $G'' = 2G'$, ofwel $G' = ce^{2x}$, dus $G = \frac{1}{2}ce^{-2x} + b$ (voor onbekende constantes c en b), in het tweede geval is $\log(G)'' = \frac{GG'' - G'^2}{G^2} = 0$, dus $G(x) = ce^{ax}$ voor onbekende c en a. Om F te bepalen gebruiken we vervolgens dat (we nemen aan dat $F \neq 0$)

$$\log(F)' = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G' - G}$$

dus voor $G = ce^{ax}$ wordt dit

$$F = be^{\int \frac{a}{a-1}} = be^{\frac{a}{a-1}x}$$

en voor $G = \frac{1}{2}ce^{2x} + b$, krijgen we

$$F = e^{\int \frac{ce^{2x}}{ce^{2x} - \frac{1}{2}ce^{2x} - b}} = e^{\int \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{b}{c}e^{-2x}}} = ae^{\log(e^{2x} - \frac{2b}{c})} = a(e^{2x} - \frac{2b}{c}).$$

Overigens zouden er ook gevallen kunnen bestaan waar soms $2G' - G'' = 0$ en soms $GG'' - G'^2 = 0$.

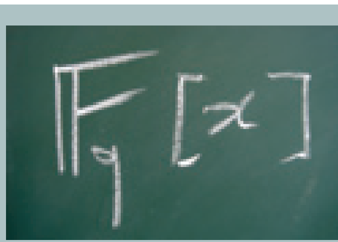
De KU Leuven, gesticht in 1425, is de oudste universiteit van de lage landen. Bijna 6.500 onderzoekers zijn er actief in wetenschappelijk onderzoek en onderwijs. Op 1 februari 2012 telde de KU Leuven in totaal 40.131 ingeschreven studenten. Van de ingeschreven studenten heeft ongeveer 84,5% de Belgische nationaliteit, terwijl 8% een andere EU-nationaliteit heeft en nog eens 7,5% van buiten de EU komt. Dit maakt van de gezellige provinciehoofdstad Leuven een bruisende studentenstad met een rijk sociocultureel aanbod.

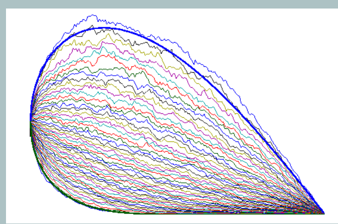
Onderzoek aan het Departement Wiskunde

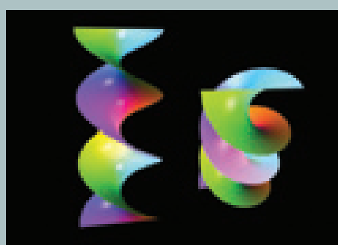
Het onderzoek aan het departement Wiskunde is georganiseerd op het niveau van de onderzoeksafdelingen:

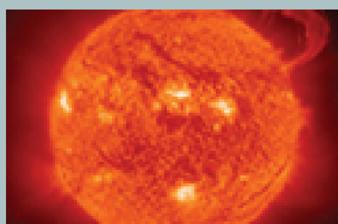
- Afdeling Algebra: het onderzoek situeert zich in de algebraïsche meetkunde, getaltheorie, algebraïsche topologie en groepentheorie.
- Afdeling Analyse: in deze afdeling doet men onderzoek in de klassieke analyse (reële en complexe analyse) en in de functionaalanalyse.
- Afdeling Meetkunde: het onderzoek is gecentreerd rond differentiaalmeetkunde, in het bijzonder Riemannse en pseudo-Riemannse meetkunde en deelvariëteiten.
- Afdeling Plasma-astrofysica: het onderzoeksdomein van deze afdeling is de wiskunde van vloeistoffen en plasma's, het voornaamste studieobject is de zon. Dit onderzoek is gesitueerd in de toegepaste en computationele wiskunde.
- Afdeling Statistiek: deze afdeling is actief in de wiskundige statistiek, in het bijzonder de theorie van extreme waarden, robuuste statistiek en niet-parametrische methoden. Ook stochastische processen en financiële wiskunde komen aan bod. De afdeling is bovendien ook actief in toegepaste consultatie voor bedrijven.

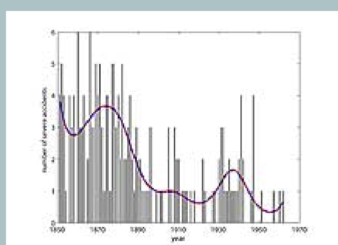
Meer info op http://wis.kuleuven.be











3. Deelbare determinanten

G.L.M. Cornelissen, Universiteit Utrecht

Stel B' is de verzameling van 2×2 matrices over de reële getallen gegeven door

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} : X, Y, Z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Schrijf een element $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ van B' als $[X, Y, Z]$. Stel B is volgende deelverzameling van B':

$$B = \{[X, Y, Z] \in B' \colon XZ \in \mathbb{R}^*\}.$$

Hierbij geldt $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Bewijs dat B een groep[1] is onder vermenigvuldiging van matrices, maar B' niet.

(b) Beschrijf een ondergroep[2] van B die isomorf[3] is met de additieve groep $(\mathbb{R}, +)$ van reële getallen, en een ondergroep die isomorf is met de multiplicatieve groep $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ van niet-nul reële getallen.

Definieer, voor $n \geq 0$, drie functies X_n, Y_n en Z_n op $\mathbb{R}^3$, door

$$[X_n(X, Y, Z), Y_n(X, Y, Z), Z_n(X, Y, Z)] = [X, Y, Z]^n.$$

(c) Bepaal een expliciete uitdrukking voor X_n, Y_n, Z_n als functie van X, Y, Z en n.

(d) Bereken de Jacobiaan[4] van de afbeelding

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (X, Y, Z) \to (X_n(X, Y, Z), Y_n(X, Y, Z), Z_n(X, Y, Z)),$$

die we noteren met $J_n(X, Y, Z)$ en zijn determinant $j_n(X, Y, Z) := \det J_n(X, Y, Z)$.

(e) Bewijs dat als X, Y, Z gehele getallen zijn en als m een deler is van n, dan $j_m(X, Y, Z)$ een deler is van $j_n(X, Y, Z)$, op twee manieren:

---

[1]Een paar $(G, \circ)$, waarbij G een verzameling en $\circ$ een operatie $G \times G \to G$ is, is een groep als aan de volgende drie eigenschappen is voldaan:

- $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ voor alle $g_1, g_2, g_3 \in G$;
- er is een element $e \in G$ zodat $g \circ e = e \circ g = g$ voor alle $g \in G$;
- voor elke $g \in G$ bestaat er een element $g^{-1} \in G$ zodat $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

[2]Een ondergroep van $(G, \circ)$ is een deelverzameling $\emptyset \neq H \subseteq G$ zodat voor alle $h_1, h_2 \in H$ geldt dat $h_1 \circ h_2^{-1} \in H$. Hieruit volgt dat $(H, \circ)$ een groep is.

[3]Twee groepen $(G\circ)$ en $(H, \bullet)$ heten isomorf als er een bijectieve functie $\phi \colon G \to H$ is zodat $\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) \bullet \phi(g_2)$ voor alle $g_1, g_2 \in G$.

[4]De Jacobiaan van een differentieerbare afbeelding $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de matrix

$$J_F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

voor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

i. door de formule uit opgave 4 te gebruiken;

ii. zonder berekening, door de kettingregel te gebruiken.

Uitwerking.

(a) Ondergroepencriterium voor B in de groep van inverteerbare matrices ($g, h \in B \Rightarrow gh^{-1} \in B$): door berekening is

$$[X_1, Y_1, Z_1] \cdot [X_2, Y_2, Z_2]^{-1} = \left[\frac{X_1}{X_2}, \frac{Y_1}{Z_2} - \frac{X_1 Y_2}{X_2 Z_2}, \frac{Z_1}{Z_2}\right] \in B.$$

In B' daarentegen heeft bijvoorbeeld $[0,0,0]$ geen (multiplicatief) inverse.

(b) $\{[1, Y, 1] \colon Y \in \mathbb{R}\}$ is isomorf met $\mathbb{R}$ en $\{[X, 0, 1] \colon X \in \mathbb{R}^*\}$ is isomorf met $\mathbb{R}^*$.

(c) Door volledige inductie:

$$[X, Y, Z]^n = \left[X^n, Y\frac{X^n - Z^n}{X - Z}, Z^n\right].$$

(d) Door rechtstreekse berekening is de Jacobiaan:

$$J_n(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} nX^{n-1} & 0 & 0 \\ Y \cdot P(X, Z) & \frac{X^n - Z^n}{X - Z} & Y P(Z, X) \\ 0 & 0 & nZ^{n-1} \end{pmatrix},$$

met

$$P(X, Z) = \frac{nX^{n-1}(X - Z) - (X^n - Z^n)}{(X - Z)^2},$$

en de determinant is

$$j_n(X, Y, Z) = n^2 X^{n-1} Z^{n-1} \frac{X^n - Z^n}{X - Z}.$$

(e) i. Als $n = mq$, dan is

$$j_n(X, Y, Z)/j_m(X, Y, Z) = q^2 X^{n-m-1} Z^{n-m-1} \frac{(X^m)^q - (Z^m)^q}{X^m - Z^m}.$$

Dit is een geheel getal voor X, Y, Z geheel, want $n \geq m$ en

$$\frac{(X^m)^q - (Z^m)^q}{X^m - Z^m} = \sum_{j=0}^{q-1} X^{m(q-1-j)} Z^{mj}.$$

ii. De kettingregel zegt

$$J_{mq}(X, Y, Z) = J_q(X_m(X, Y, Z), Y_m(X, Y, Z), Z_m(X, Y, Z)) \cdot J_m(X, Y, Z).$$

Bijgevolg is het quotient j_n/j_m gelijk aan de determinant van

$$J_q(X_m(X, Y, Z), Y_m(X, Y, Z), Z_m(X, Y, Z)),$$

waarvan alle entries gehele getallen zijn, dus i.h.b. ook zijn determinant. (Dat $P(X, Z)$ geheel is volgt, omdat $P(X, Z) = (nX^{n-1} - X^{n-1} - X^{n-2}Z - \ldots Z^{n-1})/(X - Z)$, en de teller is deelbaar door $X - Z$, want als we $X = Z$ stellen wordt die teller nul.)

4. Machtig limiet

W. Pranger, Universiteit Utrecht

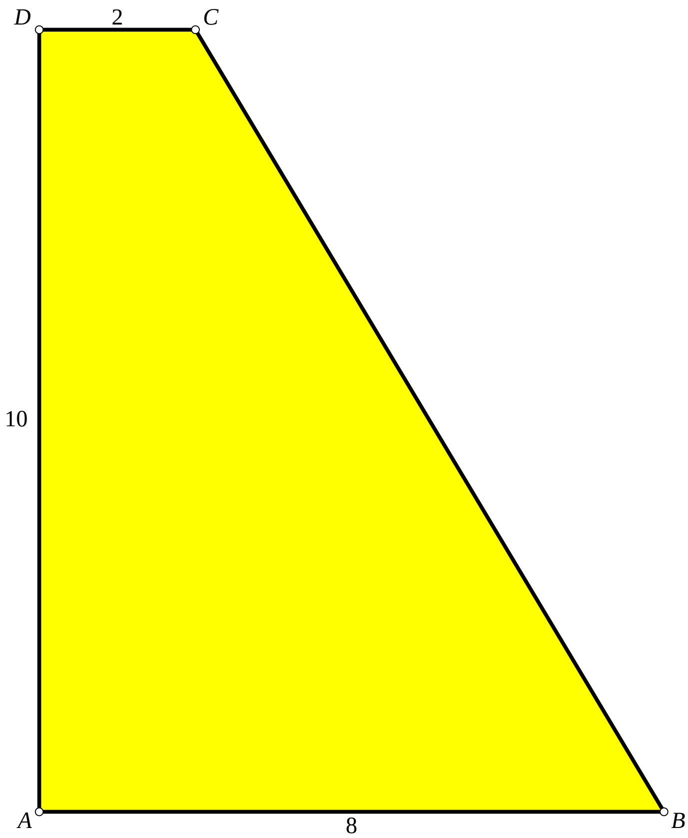
Definieer voor $n \in \mathbb{N}$ de functie $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $a \mapsto (n!)^{n^a}$. Vind alle reële getallen a waarvoor de reeks $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar een waarde in $\mathbb{R}$ en bepaal de limiet indien deze bestaat.

Uitwerking.
Voor $a \geq -1$ geldt dat $f_n(-1) \leq f_n(a)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We kunnen $f_n(-1) = \sqrt[n]{n!}$ voor afschatten met $f_n(-1) \geq \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}$, in $n!$ staan immers minstens $\frac{n}{2}$ termen die minstens $\frac{n}{2}$ zijn. Dus $f_n(-1) \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$. Het rechterlid divergeert naar ∞ als $n \to \infty$, dus $f_n(a)$ divergeert voor $a \geq -1$.
We beschouwen nu de situatie $a + 1 < 0$. Voor alle n geldt $n! \leq n^n$ en daarmee $f_n(a) \leq (n^n)^{n^a} = n^{n^{a+1}}$. Er geldt dat $n^{n^{a+1}} = e^{\log(n)n^{a+1}}$ en dat $\lim_{n\to\infty} \log(n)n^{a+1} = 0$, dit laatste omdat $a + 1 < 0$. Merk op dat $f_n(a) \geq 1$ voor alle n, en hieruit volgt dat $f_n(a) \to 1$ als $n \to \infty$.
Dus $f_n(a)$ convergeert voor $a < -1$ naar 1 en divergeert voor $a \geq -1$.

5. Gelijkvormig verdelen

T. Verhoeff, Technische Universiteit Eindhoven

Beschouw de vierhoek $ABCD$ met $\angle BAD = \angle ADC = 90°$, $|AB| = 8$, $|CD| = 2$ en $|AD| = 10$. Bepaal alle manieren om deze vierhoek met één rechte snede in twee onderling gelijkvormige veelhoeken te verdelen. Deze delen hoeven niet gelijkvormig te zijn met $ABCD$, alleen met elkaar. Geef voor elke opdeling duidelijk aan hoe de twee delen bij elkaar passen en wat de schaalfactor is. Bewijs uw antwoord.



Figuur 5.1: De gegeven situatie

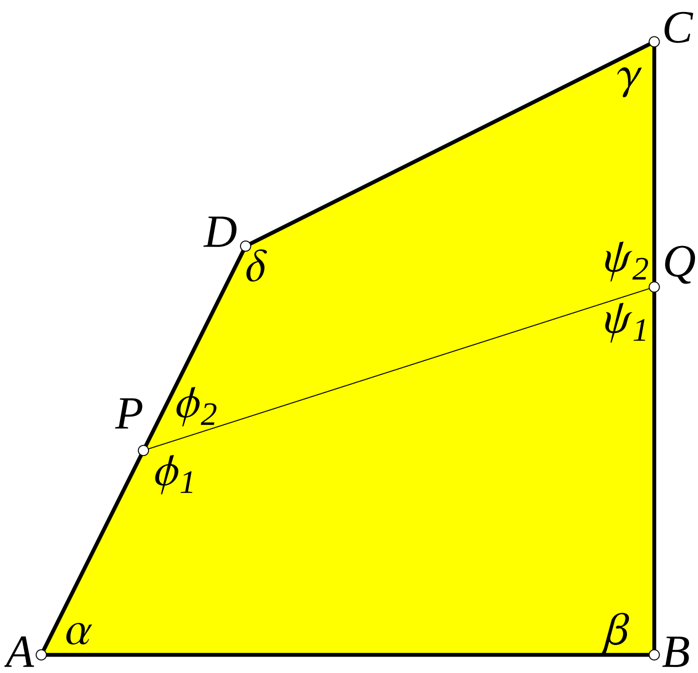
Uitwerking.

Figuur 5.1 toont de gegeven situatie. De snede kan door geen, één, of twee hoekpunten gaan. In het eerste geval krijgt elk van de delen twee extra hoekpunten van de snede en ontvangen ze bij eerlijk delen van de reeds aanwezige hoekpunten elk nog eens $4/2 = 2$ hoekenpunten erbij, waarmee het dus twee vierhoeken zijn (bij niet eerlijk delen ontstaan een driehoek en een vijfhoek). In het tweede geval krijgen we een driehoek en een vierhoek, die niet gelijkvormig kunnen zijn. In het derde geval ontstaan twee driehoeken.
Laten we eerst naar de driehoeken kijken. Een gelijkvormige verdeling in driehoeken is niet mogelijk met snede BD, want dan is $\triangle ABD$ rechthoekig en $\triangle BCD$ stomphoekig. Met snede AC is $\angle ADC$ recht en zijn $\angle BAC$ en $\angle ABC$ scherp. Derhalve dient $\angle ACB$ ook recht te zijn. Dat is hier niet het geval; bereken bijvoorbeeld het inproduct van $C - A = (2, 10)$ en

$D - B = (-6, 10)$, dat niet nul is. (Als de hoogte $2\sqrt{3}$ was geweest i.p.v. 10, dan had dit wel gewerkt.)
We kunnen ons dus beperken tot verdelingen in twee vierhoeken. De snede deelt twee overliggende zijdes. Dit kan dus op twee manieren:

- De snede gaat door AB en CD.
- De snede gaat door AD en BC.

De eerste mogelijkheid valt snel door de mand, want de linkerhelft heeft twee of vier rechte hoeken, terwijl de rechterhelft dan respectievelijk nul of twee rechte hoeken heeft. Derhalve kunnen die twee delen niet gelijkvormig zijn.



Figuur 5.2: De enige overgebleven mogelijkheid voor de ligging van PQ

AB	**Hoek gelijkheden**				**Gevolgen**			
$\mapsto$	α	β	ψ_1	ϕ_1	180°	180°	180°	
PQ	ϕ_2	ψ_2	γ	δ	$\alpha + \delta$	$\beta + \gamma$	$\alpha + \phi_1$	$AB \parallel DC \parallel PQ$; trapezium
QP	ψ_2	ϕ_2	δ	γ	$\alpha + \delta$	$\beta + \gamma$	$\alpha + \psi_1$	$AB \parallel DC$; trapezium
DP	δ	ϕ_2	ψ_2	γ	$\beta + \gamma$	$\alpha + \delta$	2α, $2\psi_i$	$AB \parallel DC$; rechthoekig trapezium
PD	ϕ_2	δ	γ	ψ_2	$\alpha + \phi_1$	$\phi_2 + \psi_2$	$\gamma + \psi_2$	$AB \parallel PQ \parallel DC$, $AD \parallel BC$; twee ruiten
CD	γ	δ	ϕ_2	ψ_2	$\phi_1 + \psi_1$	$\alpha + \delta$		$AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$; parallellogram
DC	δ	γ	ψ_2	ϕ_2	$2\phi_i$	$2\psi_i$		$AD \parallel BC$; gelijkbenig trapezium
QC	ψ_2	γ	δ	ϕ_2	Hetzelfde als PD			
CQ	γ	ψ_2	ϕ_2	δ	Equivalent met DP			

Tabel 1: Alle acht manieren om $ABQP$ af te beelden op $PQCD$

We beperken ons dus tot sneden die van punt P op AD naar punt Q op BC lopen. Zie figuur 5.2, waarin $\alpha = \delta = 90°$ even is losgelaten. Merk op dat

$$\begin{aligned}
\phi_1 + \phi_2 &= 180° \\
\psi_1 + \psi_2 &= 180° \\
\alpha + \beta + \gamma + \delta &= 360° \\
\alpha + \beta + \psi_1 + \phi_1 &= 360° \\
\phi_2 + \psi_2 + \gamma + \delta &= 360°
\end{aligned}$$

De twee delen $ABQP$ en $PQCD$ passen potentieel op $2 \cdot 4 = 8$ manieren bijelkaar (zie tabel 1). Vanwege $\alpha = \delta = 90°$ en $\beta < 90° < \gamma$, blijven hiervan alleen maar de eerste drie mogelijkheden over. Let wel dat per mogelijkheid er nog verscheidene liggingen van P en Q denkbaar zijn. We gaan nu deze drie mogelijkheden verder uitwerken.

- $AB \mapsto PQ$

  Dan is $PQ \parallel AB$, vanwege $\alpha + \phi_1 = 180°$ en $\alpha = 90°$. Daarom zal $|PQ|$ (de lengte van PQ) voldoen aan
  $$|AB| : |PQ| = |PQ| : |CD|$$
  en daarmee is
  $$|PQ| = \sqrt{|AB| \cdot |CD|}$$
  ofwel het meetkundig gemiddelde van $|AB|$ en $|CD|$, wat in dit geval $\sqrt{8 \cdot 2} = 4$ is. De schaalfactor is dan $8/4 = 2$. Dit is de enige mogelijkheid.

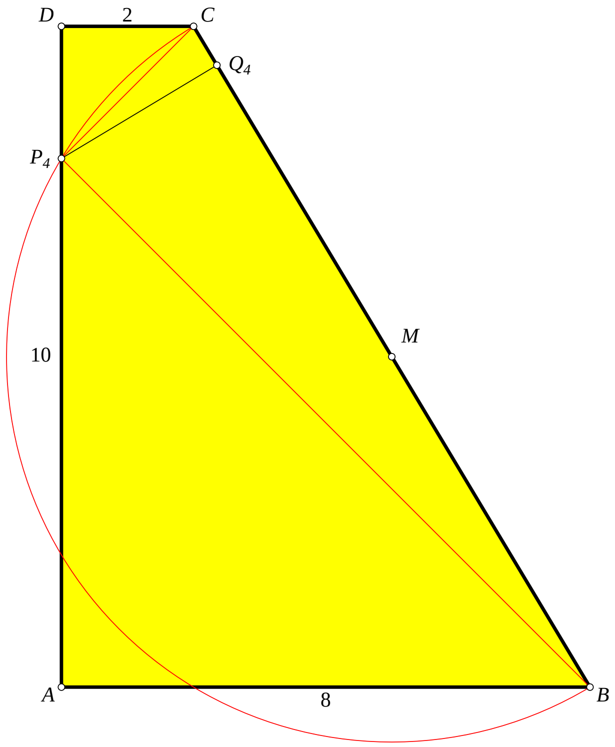
- $AB \mapsto QP$

  Dan is $PQ \perp BC$, vanwege $\alpha + \psi_1 = 180°$ en $\alpha = 90°$. Alweer zal $|PQ|$ het meetkundig gemiddelde moeten zijn van $|AB|$ en $|CD|$, dus met lengte 4. De schaalfactor is dan weer $8/4 = 2$. Ook hier is dit de enige mogelijkheid.

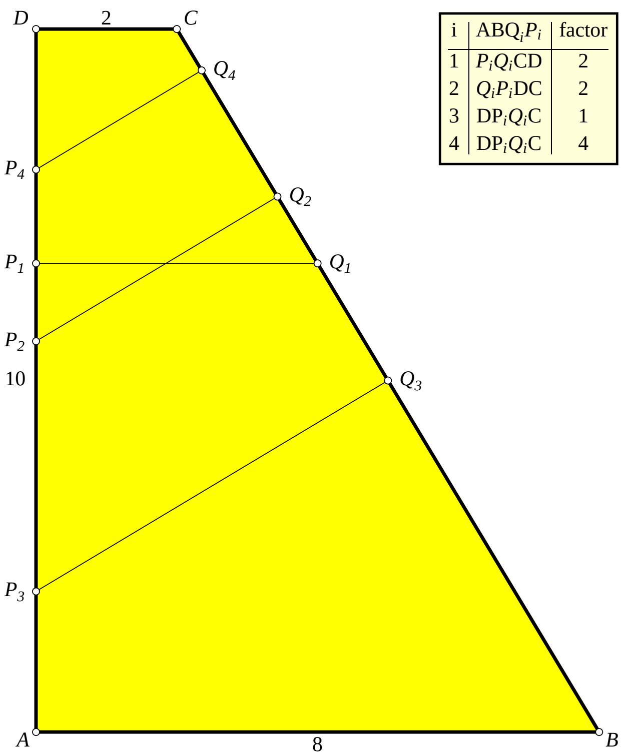
- $AB \mapsto DP$

  Ook in dit geval is $PQ \perp BC$, nu vanwege $2\psi_1 = 180°$. De schaalfactor ligt echter wat subtieler. Merk op (zie figuur 5.3) dat $\triangle BQP$ wordt afgebeeld op $\triangle PQC$ en dat deze rechthoekige driehoeken gelijkvormig dienen te zijn om een oplossing te geven. Derhalve geldt $PC \perp PB$ en dus ligt P op de cirkel met diameter BC. In de gegeven situatie heeft deze cirkel twee snijpunten met AD, die (i.h.a.) beide leiden tot een gelijkvormige tweedeling, met schaalfactoren 4 en 1.

Al met al vergt deze opgave een mengeling van meetkunde en combinatoriek. De vier tweedelingen staan samengevat in figuur 5.4.



Figuur 5.3: Situatie $AB \mapsto DP$: P ligt op cirkel om M met diameter BC



i	ABQ$_i P_i$	factor
1	$P_i Q_i$CD	2
2	$Q_i P_i$DC	2
3	DP$_i Q_i$C	1
4	DP$_i Q_i$C	4

Figuur 5.4: De vier verdelingen die werken

Probleem:

Een getal is een tweemacht wanneer het kan worden geschreven als 2^k met k een geheel getal ≥ 0.

Een getal is een reekssom als het de som is van een reeks van minimaal 2 opeenvolgende positieve gehele getallen, bijvoorbeeld $15 = 4 + 5 + 6$.

Bewijs dat alle positieve gehele getallen of een tweemacht zijn, of een reekssom, maar nooit beide.

Stuur je bewijs naar wiskunde@transtrend.com

6. Symmetrie in de asymmetrische simpele stochastische wandeling

M. Dekking, Technische Universiteit Delft

De asymmetrische simpele stochastische wandeling $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ maakt stappen van lengte 1 op het tweedimensionale rooster met gehele coördinaten. De start is in de oorsprong: $S_0 = (0, 0)$. De kansen op stappen in de vier windrichtingen $O = (1, 0), \ldots, Z = (0, -1)$ noemen we p_{O}, p_{N}, p_{W} en p_{Z}. Neem aan dat alle vier deze kansen strikt positief zijn. Er geldt $p_{\mathrm{O}}+p_{\mathrm{N}}+p_{\mathrm{W}}+p_{\mathrm{Z}}=1$. We schrijven $S_n = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)})$.
Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ en alle natuurlijke getallen $a = 0, 1, \ldots, n$ en alle gehele getallen b met $-n \leq b \leq n$ geldt[1]

$$\mathrm{P}[S_n^{(2)} = b \,|\, S_n^{(1)} = a] = \mathrm{P}[S_n^{(2)} = b \,|\, S_n^{(1)} = -a].$$

Zoals wel vaker met voorwaardelijke kansen is dit enigszins tegen-intuïtief: als bijvoorbeeld $p_{\mathrm{O}} = \frac{3}{10}, p_{\mathrm{N}} = \frac{4}{10}, p_{\mathrm{W}} = \frac{1}{10}$ *en* $p_{\mathrm{Z}} = \frac{2}{10}$*, dan drijft de wandelaar bijna zeker in noord-oostelijke richting weg, maar gegeven dat hij op de lijn* $x = a$ *zit is zijn* y*-positie net zo verdeeld als wanneer hij op de lijn* $x = -a$ *zou zitten.*

Uitwerking.
Bewijzen dat

$$\mathrm{P}[S_n^{(2)} = b \,|\, S_n^{(1)} = a] = \mathrm{P}[S_n^{(2)} = b \,|\, S_n^{(1)} = -a].$$

is equivalent met bewijzen dat

$$\mathrm{P}[S_n = (a, b)]\, \mathrm{P}[S_n^{(1)} = -a] = \mathrm{P}[S_n = (-a, b)]\, \mathrm{P}[S_n^{(1)} = a].$$

Allereerst moet opgemerkt worden dat $\mathrm{P}[S_n = (a, b)] = \mathrm{P}[S_n = (-a, b)] = 0$ als $a + b$ en n niet beiden even of beiden oneven zijn. Bovendien kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $b \geq 0$. Claim: voor $a + b \equiv n \mod 2$ is

$$\mathrm{P}[S_n = (a, b)] = \sum_{j=0}^{(n-a-b)/2} \frac{n!}{j!(a+j)!k!(b+k)!}\, {p_{\mathrm{W}}}^{j} {p_{\mathrm{O}}}^{a+j} {p_{\mathrm{Z}}}^{k} {p_{\mathrm{N}}}^{b+k}, \tag{6.1}$$

met $k = k(j) = (n - a - b - 2j)/2$.
Bewijs van vergelijking (6.1): om in a als eerste coördinaat uit te komen maakt de wandelaar zeg j stappen naar links, en $a + j$ stappen naar rechts, om in b als tweede coördinaat uit te komen maakt de wandelaar zeg k stappen naar beneden, en $b + k$ stappen naar boven. In totaal $a + 2j$ stappen horizontaal en $b + 2k$ stappen verticaal. Dit leidt tot de eis

$$a + 2j + b + 2k = n \quad \Leftrightarrow \quad k = k(j) = (n - a - b - 2j)/2.$$

Een enkel pad met bovengenoemde stappen heeft kans ${p_{\mathrm{W}}}^{j} {p_{\mathrm{O}}}^{a+j} {p_{\mathrm{Z}}}^{k} {p_{\mathrm{N}}}^{b+k}$. Er zijn $n!$ mogelijke paden, maar er zijn $n!/j!(a + j)!k!(b + k)!$ paden met bovengenoemde stappen (omdat we niet letten op de volgorde van de j stappen naar links, $a + j$ naar rechts, etc.).
We moeten nog kijken naar de mogelijkheden voor de lopende variabele j. Laat E de verzameling van toegestane j zijn. Dan is

$$E = \{j \in \mathbb{Z} : j \geq 0,\ a + j \geq 0,\ k \geq 0,\ b + k \geq 0\}.$$

[1] Voor gebeurtenissen A en B met $P[B] \neq 0$ is de voorwaardelijke kans $\mathrm{P}[A \,|\, B]$ de kans dat gebeurtenis A plaatsvindt gegeven dat gebeurtenis B plaatsvindt. Per definitie is $\mathrm{P}[A \,|\, B]$ gelijk aan $\frac{P[A \text{ en } B]}{P[B]}$.

De tweede eis wordt geïmpliceerd door de eerste, en de derde en de vierde zijn respectievelijk equivalent met $2j \leq n-a-b$ en $2j \leq n-a+b$. Dit gecombineerd leidt tot $j \leq (n-a-b)/2$, en dit is de bovengrens in (6.1).
Door het verwisselen van de symbolen W en O (de rest allemaal laten staan!) krijgen we uit (6.1) de formule voor $\mathrm{P}[S_n = (-a,b)]$.
Nu nog $\mathrm{P}[S_n^{(1)} = a]$. Met een vergelijkbaar argument, en de notatie $\lfloor u \rfloor$ voor het grootste gehele getal kleiner dan u, vinden we

$$\mathrm{P}[S_n^{(1)} = a] = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-a)/2 \rfloor} \frac{n!}{i!(a+i)!(n-2i-a)!} {p_\mathrm{W}}^i {p_\mathrm{O}}^{a+i} (p_\mathrm{Z} + p_\mathrm{N})^{n-2i-a}. \tag{6.2}$$

Combinatie van (6.1) en (6.2) (met W en O verwisseld) geeft nu

$$\mathrm{P}[S_n = (a,b)]\, \mathrm{P}[S_n^{(1)} = -a] =$$
$$\sum_{j=0}^{(n-a-b)/2} \sum_{i=0}^{\lfloor (n-a)/2 \rfloor} \frac{n!}{j!(a+j)!k!(b+k)!} \frac{n!}{i!(a+i)!(n-2i-a)!} {p_\mathrm{W}}^{j+a+i} {p_\mathrm{O}}^{a+j+i} {p_\mathrm{Z}}^k {p_\mathrm{N}}^{b+k} (p_\mathrm{Z} + p_\mathrm{N})^{n-2i-a} =$$
$$\mathrm{P}[S_n = (-a,b)]\, \mathrm{P}[S_n^{(1)} = a],$$

het laatste gelijkteken met behulp van (6.1) (met W en O verwisseld) en (6.2).

Slotopmerking: de essentie van de oplossing zit in de observatie dat $\mathrm{P}[S_n = (a,b)]$ overgaat in $\mathrm{P}[S_n = (-a,b)]$ door verwisseling van W en O. Oplossingen die de combinatorische constanten of de grenzen van de sommen niet of niet juist geven kunnen dus toch hoog scoren.

7. Recursieve polynomen

B.E. van Dalen, Nederlandse Wiskunde Olympiade en Aloysius College Den Haag

(a) Bepaal alle $a \in \mathbb{Z}$ waarvoor er een polynoom $P(x)$ met gehele coëfficiënten bestaat dat voldoet aan:

- $P(0) = 1$;
- $P(n) = P(n-1) + 2n - 1$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots, 99$;
- $P(100) = a$.

(b) Bepaal alle $b \in \mathbb{Z}$ waarvoor er een polynoom $Q(x)$ met gehele coëfficiënten bestaat dat voldoet aan:

- $Q(0) = 1$;
- $Q(m) = Q(m-2) + 2m - 2$ voor $m = 2, 4, 6, \ldots, 98$;
- $Q(100) = b$.

Uitwerking.

(a) Bekijk een polynoom P dat aan de eisen voldoet. Er geldt $P(0) = 1$, $P(1) = 1 + 1 = 2$, $P(2) = 2 + 3 = 5$ en voor grotere $n \leq 99$:

$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1) + (2n-1) \\ &= P(n-2) + (2n-3) + (2n-1) \\ &\ \ \vdots \\ &= P(0) + 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) \\ &= P(0) + n^2 \\ &= 1 + n^2. \end{aligned}$$

Dus $P(n) = 1 + n^2$ voor $0 \leq n \leq 99$.

Definieer nu $T(x) = P(x) - (x^2 + 1)$. Dan geldt $T(n) = 0$ voor $0 \leq n \leq 99$, dus $T(x)$ is deelbaar door een factor $x - n$ voor alle n met $0 \leq n \leq 99$. Daarnaast heeft T net als P gehele coëfficiënten. Als we alleen monische factoren met gehele coëfficiënten uitdelen, houdt het quotiënt ook gehele coëfficiënten. Dus we kunnen schrijven

$$T(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-99) \cdot R(x),$$

waarbij R een polynoom met gehele coëfficiënten is. Dit betekent dat

$$P(x) = x^2 + 1 + x(x-1)(x-2)\cdots(x-99) \cdot R(x). \tag{7.1}$$

Als we $x = 100$ invullen, krijgen we

$$P(100) = 10001 + 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot R(100) = 10001 + 100! \cdot R(100).$$

Omdat $R(100)$ een geheel getal is, zien we dat $P(100) = 10001 + 100!c$ voor een zekere gehele c. Dus alleen voor gehele getallen a van de vorm $a = 10001 + 100!c$ kan er een polynoom P bestaan dat aan alle voorwaarden voldoet. Anderzijds kun je voor elke $a = 10001 + 100!c$ zo'n polynoom construeren door R gelijk te nemen aan een geschikt constant polynoom, namelijk $R(x) = c$. Als we dan $P(x)$ definiëren als in (7.1), voldoet P aan alle voorwaarden.

We concluderen dat er zo'n polynoom P bestaat precies voor alle gehele a met $a \equiv 10001 \mod 100!$.

(b) Bekijk een polynoom Q dat aan de eisen voldoet. Er geldt $Q(0) = 1$, $Q(2) = 1 + 2 = 3$ en $Q(4) = 3 + 6 = 9$.

Omdat $Q(0) = 1$, is er een polynoom S met gehele coëfficiënten zodat

$$Q(x) = 1 + x \cdot S(x).$$

Uit $Q(2) = 3$ en $Q(4) = 9$ volgt $S(2) = 1$ en $S(4) = 2$.

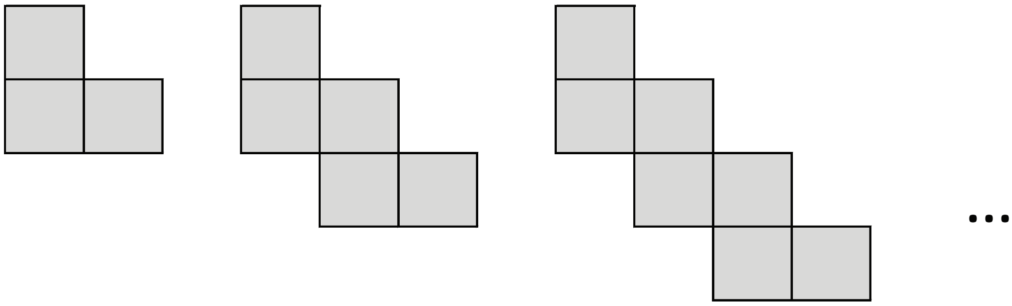
Omdat S gehele coëfficiënten heeft, geldt $u - v \mid S(u) - S(v)$ voor alle gehele u en v. Als we hier echter $u = 4$, $v = 2$ invullen, krijgen we $4 - 2 \mid 2 - 1$, wat een tegenspraak is.

Er bestaat dus geen polynoom Q dat aan de eisen voldoet, onafhankelijk van de waarde van b. Dus voor geen enkele b bestaat zo'n polynoom.

8. Puzzelen

S. Boersma, Universiteit Utrecht

Voor welke $n \in \mathbb{N}$ kan een $n \times n$-schaakbord precies worden bedekt met de volgende puzzelstukken:



Het betreft hier oneindig veel verschillende puzzelstukken die elk onbeperkt vaak mogen worden gebruikt. Ook mogen ze worden gedraaid en gespiegeld. Het i^{de} puzzelstuk is het stuk dat op een $(i+1) \times (i+1)$-schaakbord precies een diagonaal en de vakjes direct onder die diagonaal kan bedekken. Puzzelstukken mogen elkaar niet overlappen.

Uitwerking.
Het juiste antwoord is dat een $n \times n$-vierkant kan worden gelegd met deze stukken dan en slechts dan als $n > 5$. Een bewijs hiervoor luidt als volgt:

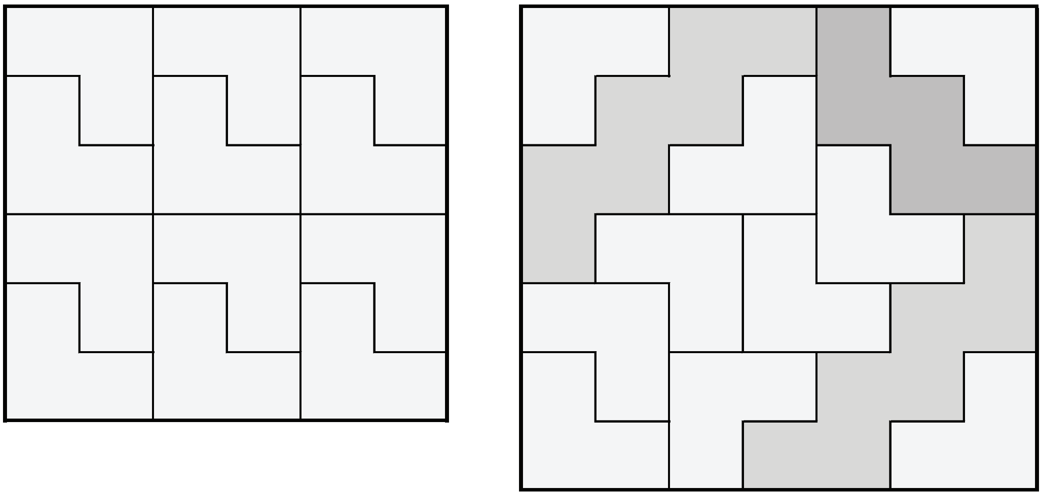
Het vierde en grotere puzzelstukken hoeven niet te worden beschouwd, aangezien deze kunnen worden opgebouwd uit de eerste drie puzzelstukken. Noem de overgebleven stukken vanaf heden het kleine, middelste en grote puzzelstuk. Deze bestaan uit respectievelijk 3, 5 en 7 vakjes.
Zij S de verzameling waar we naar op zoek zijn, ofwel:

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{met de stukken kan een } n \times n\text{-vierkant worden gelegd}\}.$$

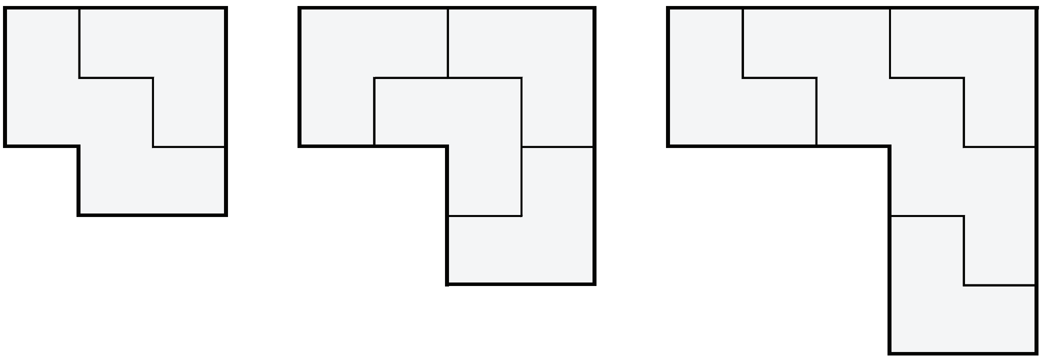
Zij Γ_n nu de volgende figuur: uit een $(n+2) \times (n+2)$-vierkant verwijderen we de $n \times n$-vierkant linksonder, zodat een winkelhaak ontstaat met dikte 2 en twee poten van lengte n (zie verderop voor Γ_1, Γ_2 en Γ_3 als voorbeeld).
Laat nu:

$$G = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{met de stukken kan } \Gamma_n \text{ worden gelegd}\}.$$

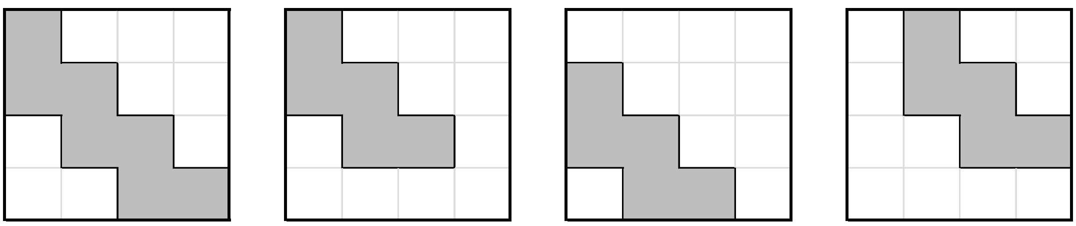
De volgende figuren tonen aan dat $6, 7 \in S$:



De volgende figuren tonen aan dat $1, 2, 3 \in G$:

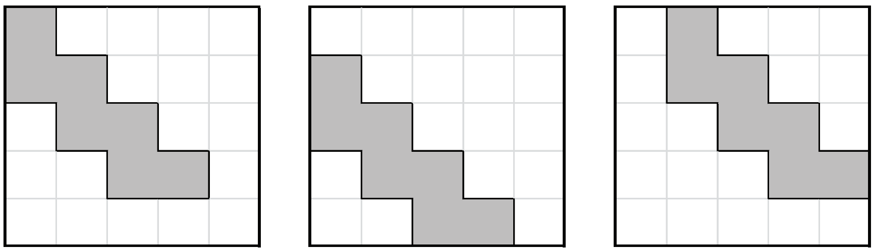


Omdat met twee kleine stukjes een 2×3-rechthoek kan worden gelegd die aan bovenstaande winkelhaken kunnen worden vastgeplakt, geldt dat $n \in G \Rightarrow n + 3 \in G$, en uit inductie volgt dan dat $G = \mathbb{N}$.
Als we Γ_n aan een $n \times n$-vierkant plakken, ontstaan een $(n+2) \times (n+2)$-vierkant. Dus geldt dat $n \in S \cap G \Rightarrow n + 2 \in S$. Aangezien nu $6, 7 \in S$ en $G = \mathbb{N}$, volgt met inductie dat $n \in S \ \forall n > 5$.
Tenslotte moet nog worden aangetoond dat $1, 2, 3, 4, 5 \notin S$. Voor $1, 2, 3$ is dit triviaal. Voor 4 kan het volgende worden gezegd:
Indien een grootste puzzelstuk wordt gebruikt, moeten daarbij drie van de kleinste worden gevoegd, om het totaal aantal vakjes op 16 te laten uitkomen. Zonder verlies van algemeenheid ligt het grote stuk dan als in het onderstaande linkerplaatje in het vierkant:

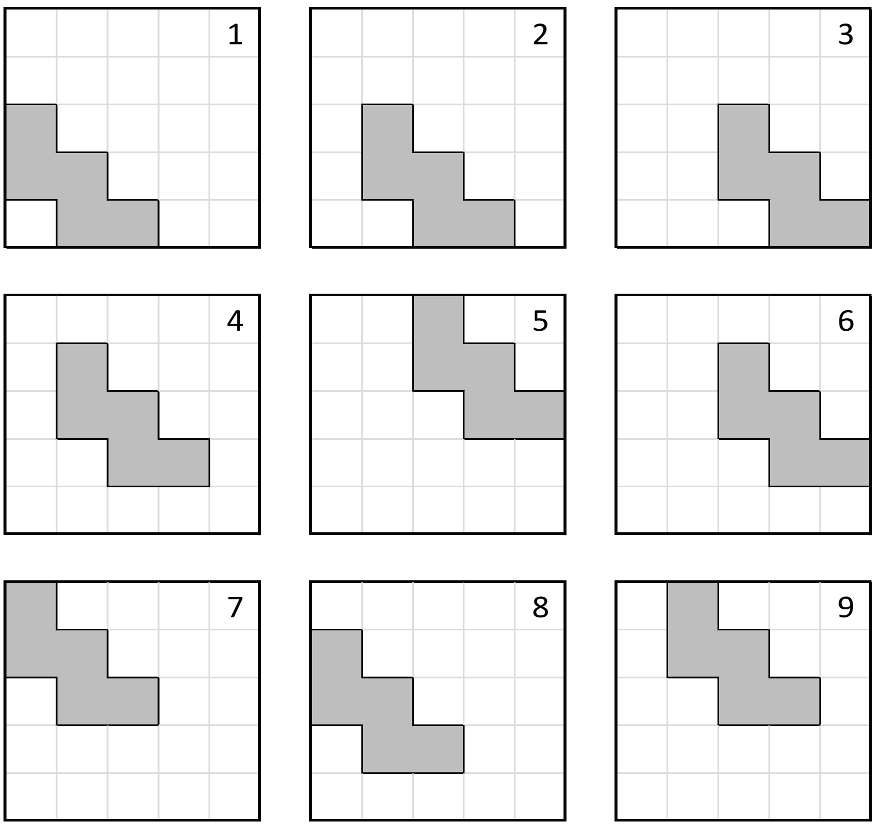


Het is niet mogelijk deze configuratie af te maken. Aangezien 16 niet deelbaar is door 3,

moet dan tenminste één middelgroot stuk worden gebruikt, en in dat geval zijn er twee van die stukken nodig, en twee kleine stukken om het totaal aantal vakjes op 16 te laten uitkomen. Het eerste middelgrote stuk moet zonder verlies van algemeenheid op één van de manieren worden gelegd als in de andere plaatjes hierboven. In elk van de drie gevallen kan de configuratie niet worden afgemaakt, en dus geldt $4 \notin S$.
Ten slotte tonen we aan dat $5 \notin S$. Een middelgroot of groot stuk dat een hoekvakje inneemt, ligt ook over het middelste vakje. Omdat dergelijke stukken niet op twee hoekvakjes tegelijk kunnen liggen, moeten er tenminste drie kleine stukjes zijn om op hoekvakjes te liggen. Er zijn nu nog twee mogelijkheden: een groot stukje en 6 kleine stukjes, of twee middelgrote stukjes en 5 kleine stukjes. In het eerste geval geldt dat het grote stukje zonder verlies van algemeenheid op één van de volgende manieren moet liggen:



In alle gevallen kan de figuur niet worden afgemaakt met kleine stukjes (bij het middelste geval geldt dat de stukjes in de hoeken linksboven, linksonder en rechtsonder vastliggen en er dan een 3×3-vierkant overblijft).
In het geval van twee middelgrote en vijf kleine stukken, ligt het eerste middelgrote stuk zonder verlies van algemeenheid op één van de volgende manieren:



Deze configuraties kunnen geen van allen worden afgemaakt, want:

1. Het hokje linksonder is geïsoleerd.
2. Het stuk dat op het vakje linksmidden ligt sluit de linkerbovenhoek af.
3. Het stuk dat middenonder ligt sluit de linkeronderhoek af.
4. Het stuk dat op het vakje linksmidden ligt sluit de linkeronderhoek af.
5. Het andere middelgrote stuk moet op het middelste vakje liggen, en elke mogelijkheid voorkomt dat de het kan worden afgemaakt.
6. Er kan geen stuk rechtsonder liggen.
7. Dit is hetzelfde als geval 3.
8. Dit is hetzelfde als geval 2.
9. Dit is hetzelfde als geval 6.

Hieruit volgt dat ook $5 \notin S$.
Overigens geldt hetzelfde resultaat als men alleen het eerste en tweede puzzelstuk uit de reeks gebruikt, dus ook het derde stuk is niet nodig! Het bewijs hiervoor is nog een stukje lastiger. We laten dit als opgave over aan de lezer.

Universiteit Utrecht

Department of
Mathematics

Zeven goede redenen

Zeven goede redenen om Wiskunde te studeren in Utrecht:

1. Breedste pakket aan keuzevakken
2. Dubbele majors met Natuurkunde en Informatica
3. Major Wiskunde en toepassingen
4. Aansluiting op masters uit andere vakgebieden
5. Hoog aangeschreven wetenschappelijke staf
6. Kans op een promotieplaats na je masters
7. Geschiedenis van de Wiskunde

Meer informatie:
- www.uu.nl/bachelor
- www.uu.nl/master
- Studieadviseur Marian Brands m.m.brands@uu.nl
- Onderwijsmanager Thijs Ruijgrok m.ruijgrok@uu.nl

En succes met de LIMO 2012

9. Werken modulo eindig

K.P. Hart, Technische Universiteit Delft

We definiëren de relatie $<^*$ op de verzameling $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ van alle functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ door: $f <^* g$ als $f(n) < g(n)$ voor alle n, op eindig veel na, dat wil zeggen als $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \geq g(n)\}$ eindig is.

(a) Toon aan: als $\mathcal{F}$ een aftelbare[1] deelverzameling van $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ is dan is er een $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zó dat $f <^* g$ voor alle $f \in \mathcal{F}$.

(b) Laat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ twee rijen functies in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zijn zó dat $f_n <^* f_{n+1} <^* g_{n+1} <^* g_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Toon aan dat er een functie $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ bestaat zó dat $f_n <^* h <^* g_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) In deze deelopgave mag je het keuzeaxioma[2] aannemen.
We definiëren twee oneindige kardinaalgetallen $\mathfrak{d}$ en $\mathfrak{d}^+$ door

- $\mathfrak{d}$ is de minimale kardinaliteit van een verzameling, $\mathcal{D}$, van functies met de eigenschap dat voor elke $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een $g \in \mathcal{D}$ bestaat met $f <^* g$.
- $\mathfrak{d}^+$ is de minimale kardinaliteit van een verzameling, $\mathcal{D}$, van functies met de eigenschap dat voor elke $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een $g \in \mathcal{D}$ bestaat met $f(n) < g(n)$ voor *alle* $n \in \mathbb{N}$.

Toon aan dat $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^+$.

Uitwerking.

(a) Laat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een aftelling van $\mathcal{F}$ zijn (herhaling mag, en moet als $\mathcal{F}$ eindig is). Definieer nu g door
$$g(n) = 1 + \max\{f_i(n) \mid i \leq n\}.$$
Dan geldt voor elke i dat $f_i(n) < g(n)$ als $n \geq i$, dus $f_i <^* g$.

(b) Met wat boekhouding is dit op bijna dezelfde wijze te bewijzen als in opgave (a). Voor elke i bestaan getallen k_i, l_i en m_i zó dat

- voor $n \geq k_i$ geldt $f_i(n) < f_{i+1}(n)$
- voor $n \geq l_i$ geldt $f_{i+1}(n) < g_{i+1}(n)$
- voor $n \geq m_i$ geldt $g_{i+1}(n) < g_i(n)$

Nemen we nu $n_i = \max\{k_i, l_i, m_i\}$ dan geldt voor $n \geq n_i$ natuurlijk
$$f_i(n) < f_{i+1}(n) < g_{i+1}(n) < g_i(n)$$

[1] Een verzameling A heet aftelbaar als er een surjectieve functie $f\colon \mathbb{N} \to A$ bestaat.

[2] Het keuzeaxioma zegt dat er voor elke surjectieve functie $f\colon A \to B$ een functie $\sigma\colon B \to A$ bestaat zodat $f \circ \sigma$ de identiteit is op B. Uit het keuzeaxioma volgt in het bijzonder dat voor elke twee verzamelingen A en B er een injectieve functie $A \to B$ is (notatie $|A| \leq |B|$) of een injectieve functie $B \to A$ is. Dit geeft gelegenheid om een maximum van twee kardinaalgetallen te definiëren. Bovendien volgt uit het keuzeaxioma dat voor elke twee oneindige verzamelingen A en B geldt $|\mathbb{N}| \leq |A|$ en $|A + B| = \max\{|A|, |B|\} = |A \times B|$.

Ten slotte definiëren we $N_0 = 0$, en, recursief, $N_i = \max\{N_{i-1}, n_i, i\}$. Definieer nu de functie h door $h(n) = 0$ als $n < N_1$ en

$$h(n) = f_{i+1}(n) \text{ als } N_i \leq n < N_{i+1}$$

Dan is h als gewenst, immers $f_i(n) < h(n) < g_i(n)$ als $n \geq N_i$.

(c) Het moge duidelijk zijn dat $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{d}^+$. Immers, een definiërende verzameling voor $\mathfrak{d}^+$ is zeker een definiërende verzameling voor $\mathfrak{d}$.

Zij $\mathcal{D}$ een verzameling functies met $|\mathcal{D}| = \mathfrak{d}$ en zó dat voor elke $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een $g \in \mathcal{D}$ bestaat met $f <^* g$. Maak uit elke $g \in \mathcal{D}$ een rij functies $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$, als volgt: $g_i(n) = \max\{g(n), i\}$. Merk nu op: als $f <^* g$ dan volgt dat er een i is zó dat $f(n) < g_i(n)$ voor *alle* n: neem bijvoorbeeld maar

$$i = 1 + \max\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}, f(n) \geq g(n)\}.$$

Nu volgt dat $\mathcal{D}^+ = \{g_i \mid g \in \mathcal{D}, i \in \mathbb{N}\}$ een definiërende verzameling voor $\mathfrak{d}^+$ is van kardinaliteit $\mathfrak{d} \cdot |\mathbb{N}| = \mathfrak{d}$, dus $\mathfrak{d}^+ \leq \mathfrak{d}$. Samen met bovenstaande volgt nu $\mathfrak{d}^+ = \mathfrak{d}$.
N.B. uit onderdeel (a) volgt dat $\mathfrak{d}$ een overaftelbaar kardinaalgetal is.

TALENT&PRO&MARLOES

Het is een mooi citaat waar we bij Talent&Pro oprecht in geloven. Jouw persoonlijke ontwikkeling staat centraal bij Talent&Pro. In de eerste jaren van je carrière wordt je door ons begeleidt en we helpen je passies en talenten te ontdekken, zodat je gericht kunt werken aan jouw ambities.

"Ik zie T&P niet als mijn werkgever, maar als mijn partner. We werken voor elkaar."

Marloes Lodder
Actuarieel Professional
bij Talent&Pro sinds 2009

Vind je het heerlijk om met je neus in de cijfers, formules en wiskundige berekeningen te zitten en ben jij een (bijna) afgestudeerd bèta-talent? Dan is het actuariële traject bij Talent&Pro echt iets voor jou! In het Actuariële vakgebied pas je jouw wiskundig inzicht toe op vraagstukken in het bedrijfsleven. Talent&Pro biedt jou de mogelijkheid om de opleiding tot Actuarieel Rekenaar, Analist en Actuaris te volgen.

Gemiddeld werk je per jaar aan 2 verschillende opdrachten bij onze relaties in het verzekeringswezen, bij pensioenfondsen en actuarieel adviesbureaus. Daarnaast volg je vaardigheidstrainingen en krijg je persoonlijke coaching om je te ontwikkelen tot een zeer ervaren professional. Net zoals Marloes.

Interesse?
Ga naar www.talent-pro.com en solliciteer.

Talent&Pro?

Talent&Pro is al bijna vijftien jaar een toonaangevende financiële detacheerder in Nederland. Binnen onze sectoren Verzekeringen, Banken, Pensioenfondsen en Actuarieel werken meer dan 400 toptalenten en professionals voor gezichtsbepalende financiële opdrachtgevers. Toegewijde hbo'ers en wo'ers in vaste dienst, die onder de streep zichtbaar een verschil maken. Omdat ze verder denken. Meer doen.

Bancair
Verzekeringen
Actuarieel
Pensioen+Leven

10. Enige som

G.W.Q. Puite, Technische Universiteit Eindhoven en Hogeschool Utrecht

Vind alle reële getallen $\alpha > 0$ waarvoor geldt dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2012}{(n+\alpha)(16n+2012)} \;=\; 1.$$

Uitwerking.
Definieer

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2012}{(n+\alpha)(16n+2012)}.$$

Merk op dat voor elke $\alpha > 0$ de reeks convergeert, omdat de termen positief zijn en de reeks wordt gemajoreerd door de convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2012}{n \cdot 16n} = \frac{2012}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2012}{16} \cdot \frac{\pi^2}{6}$.
Het is verder duidelijk dat f strikt dalend is in α, omdat elke term van de rij strikt dalend in α is. Er is dus hooguit één α die voldoet aan $f(\alpha) = 1$.
We laten nu zien dat $\alpha = \frac{499}{4}$ voldoet. Merk daartoe allereerst op dat

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4n+499} - \frac{1}{4n+503} &= \frac{4n+503}{(4n+499)(4n+503)} - \frac{4n+499}{(4n+499)(4n+503)} \\
&= \frac{4}{(4n+499)(4n+503)}.
\end{aligned}$$

Invullen van $\alpha = \frac{499}{4}$ geeft nu

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2012}{(n+\frac{499}{4})(16n+2012)} &= 503 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n+499)(4n+503)} \\
&= 503 \cdot \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{4n+499} - \frac{1}{4n+503} \right) \\
&= 503 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{503} - \frac{1}{507} + \frac{1}{507} - \frac{1}{511} + \cdots + \frac{1}{4k+499} - \frac{1}{4k+503} \right) \\
&= 503 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{503} - \frac{1}{4k+503} \right) \\
&= 503 \cdot \frac{1}{503} = 1.
\end{aligned}$$

We concluderen dat $\alpha = \frac{499}{4}$ de enige oplossing is.

INFORMATION
www.ru.nl/math

Mathematics (MSc)

MASTERS PROGRAMME

The department

The mathematics department currently has 17 staff members and a fluctuating population of about 20 PhD students and postdocs. This relatively small size has considerable advantages for students. You will not drown in a large student pool, and contact with staff and fellow students is pleasant and very easy to make.
We take a highly personal approach!
The combination of local courses and lectures offered by the national Dutch Master Program in Mathematics guarantees a broad and high-level range of topics to choose from.

Career prospects

Practically all of our graduates find employment immediately after graduating, in a very wide range of jobs including business, academia, government and ICT.

Research topics

Our Master's programme is closely related to the research carried out in the Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics (IMAPP), and in addition there are close research ties with the institute for Computing and Information Sciences (iCIS) and the Donders Centre for Neuroscience (DCN) at the Radboud University.
Our research is embedded in the national mathematics clusters DIAMANT (websites.math.leidenuniv.nl/diamant/), GQT (www.gqt.nl) and STAR (www.eurandom.tue.nl/STAR/).
As is often the case the research topics are linked to individuals. We invite you to look at www.ru.nl/math for more information.

FOR MORE SPECIFIC INFORMATION
contact Bernd Souvignier: souvi@math.ru.nl

You can choose from the following specializations:

Algebra and Logic

Algebraic and differential topology, algebraic logic, computer algebra in its many forms, complexity theory, affine algebraic geometry, mathematical crystallography. Furthermore, in collaboration with iCIS we offer an exciting interdisciplinary programme in the mathematical foundations of computer science.

Mathematical Physics

Representation theory, symplectic geometry, integrable systems, special functions, topos theory, noncommutative geometry, mathematical foundations of quantum theory, quantum probability, quantum computing, quantum field theory, quantum groups.

Applied Stochastics

Interacting stochastic systems, i.e. systems consisting of a large number of interacting and stochastically evolving components, with applications to statistical physics (gases and liquids), biology (population dynamics) and neuroscience (self-organized criticality in brain activity, random graph theory, cortical networks).

Personal tutor for a tailor-made programme

Our Master's programme offers you considerable freedom to follow your own interests. At the beginning of the two-year programme, you choose your area of specialization and a personal tutor within that area, with whom you decide what your precise research area and package of courses at both the local and the national level will be. In the second year, you spend most of your time on your MSc dissertation in the research area of your choice. In short, we offer you a tailor-made programme.

Mathematics (MSc)

11. Fibonacci ontmoet Fermat

H.W. Lenstra, Universiteit Leiden

De rij f_0, f_1, … Fibonaccigetallen is gedefiniëerd door $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{i+2} = f_i + f_{i+1}$ $(i \geq 0)$. De rij F_0, F_1, … Fermatgetallen is gedefiniëerd door $F_m = 2^{2^m} + 1$. Bepaal alle paren niet-negatieve gehele getallen n, m met $f_n = F_m$.

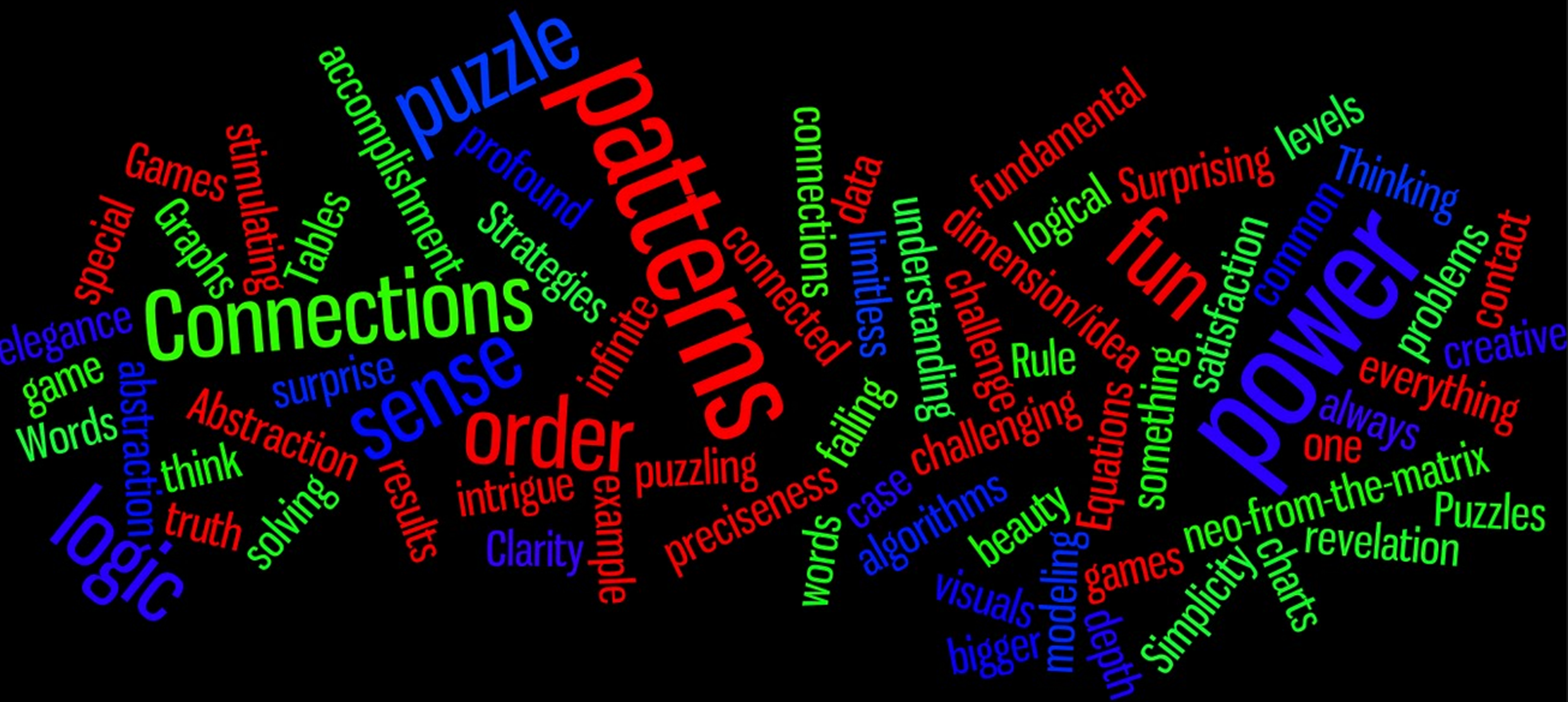
Uitwerking.
De enige oplossingen zijn $n = 4$, $m = 0$, met $f_4 = F_0 = 3$, en $n = 5$, $m = 1$, met $f_5 = F_1 = 5$. Om dit te bewijzen is het kennelijk voldoende een tegenspraak af te leiden uit de aanname $m \geq 2$. Stel dus $m \geq 2$. Dan is $2^{2^m} \equiv 0 \bmod 16$ (omdat $2^m \geq 4$) en $2^{2^m} \equiv 1 \bmod 3$ (omdat 2^m even), dus $2^{2^m} \equiv 16 \bmod 48$ en $f_n = F_m = 2^{2^m} + 1 \equiv 17 \bmod 48$. Maar voor n congruent met 0, 1, …, 23 modulo 24 is f_n modulo 48 congruent is met respectievelijk

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 7, 41, 0, 41, 41, 34, 27, 13, 40, 5, 45, 2, 47, 1,$$

en 17 zit daar niet bij. Dit is de verlangde tegenspraak.

Faculteit Wetenschappen

www.wiskunde.ugent.be



UNIVERSITEIT GENT

12. Priempolynoom

A. Smeets, KU Leuven

Aan elk priemgetal kunnen we een polynoom associëren door de cijfers van het priemgetal als coëfficiënten te nemen. Bijvoorbeeld: aan de priemgetallen 2, 37, 3041 en 65537 associëren we 2, $3X + 7$, $3X^3 + 4X + 1$ en $6X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 7$. Bewijs dat een dergelijk "priempolynoom" irreducibel[1] is in $\mathbb{Z}[X]$.

Uitwerking.
Zij $P(X)$ een dergelijk "priempolynoom" en veronderstel dat $P(X) = Q(X) \cdot R(X)$ met $Q(X), R(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Aangezien $P(10)$ priem is moet gelden dat $Q(10) = \pm 1$ of $R(10) = \pm 1$. Zonder verlies van de algemeenheid kunnen we veronderstellen dat $R(10) = 1$. Bekijk (over $\mathbb{C}$) de ontbinding in lineaire factoren

$$R(X) = \alpha \prod_{i=1}^{\ell} (X - \eta_i) \quad \text{met} \quad \alpha \in \mathbb{Z},\, \eta_1, \cdots, \eta_\ell \in \mathbb{C}.$$

Dan geldt voor minstens één $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ dat $|10 - \eta_i| \leq 1$: immers, als $|10 - \eta_i| > 1$ voor alle i, dan zou

$$1 = R(10) = |\alpha| \prod_{i=1}^{\ell} |10 - \eta_i| > |\alpha| \geq 1$$

en dat is absurd.
Anderzijds moet natuurlijk $P(\eta_i) = 0$ voor alle i omdat $R(X) \mid P(X)$. Schrijf $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$. Als $n \leq 1$ is het resultaat triviaal, dus we veronderstellen $n \geq 2$. Voor elke i met $|10 - \eta_i| \leq 1$ geldt $|\eta_i| \geq 9$ en

$$\begin{aligned} 1 \leq a_n &\leq \operatorname{Re}\left(a_n + a_{n-1}\eta_i^{-1}\right) \leq \left|a_n + a_{n-1}\eta_i^{-1}\right| \\ &= \left| \frac{P(X)}{\eta_i^n} - \sum_{j=0}^{n-2} a_j \eta_i^{j-n} \right| \leq \sum_{j=0}^{n-2} a_j |\eta_i|^{j-n} \leq \sum_{j=0}^{n-2} 9 \cdot 9^{j-n} < 1. \end{aligned}$$

Dit is een contradictie en daarmee zijn we klaar.

[1] Een polynoom met gehele coëfficiënten heet irreducibel als het niet kan worden geschreven als een product van twee elementen van $\mathbb{Z}[X]$ die beide verschillen van 1 en -1.