Uitwerkingen

Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade 2014

Inhoudsopgave

Colofon

Dit uitwerkingenboekje is een uitgave van de
LIMO-commissie 2014.
e-mail: limo@gewis.nl
internet: www.gewis.nl\limo

Omslagontwerp: Ylona Meeuwenberg
Opgaven: Michel Dekking, Michiel Hochstenbach, Arne Smeets, Simeon Nieman, Tom Verhoeff, Jan van Neerven, Josse van Dobben de Bruyn, Rob Tijdeman, Fokko van de Bult, Hendrik Lenstra, Gerhard Woeginger

Regels en tips

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Verzamel het werk per opgave in het daarvoor bestemde mapje.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Voor drinken wordt tijdens de wedstrijd gezorgd. Er komt regelmatig iemand langs om vragen aan te kunnen stellen.

Tips die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is een definitie gegeven in een voetnoot. Verder wordt met $\mathbb{N}$ de verzameling van strikt positieve gehele getallen bedoeld, dat wil zeggen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven. Besteed dus gemiddeld meer tijd aan opgaven met lagere nummers.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bespreek ook vooraf waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk. Vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes**. Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen dat relevant kan zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moest worden, wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}$, probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor $n = 1$ of $n = 2$. Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

1. Graafhomomorphismen

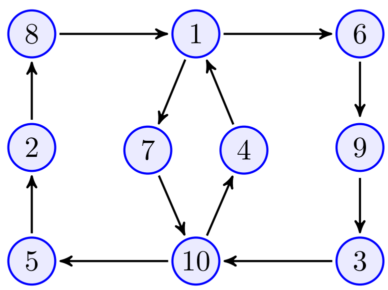
Prof. dr. F.M. (Michel) Dekking, Technische Universiteit Delft

Een gerichte graaf is een paar verzamelingen (V, E). Hier heten de elementen van V de knopen, en de elementen van E de pijlen. De pijlen E zijn een deelverzameling van $V \times V$; (v, v') heet de pijl van v naar v'. Als we twee gerichte grafen $\mathcal{G} = (V, E)$, en $\mathcal{H} = (W, F)$, hebben dan is een graafhomomorfismse φ een afbeelding $\varphi : V \to W$, die de 'pijlen behoudt':
$(v, v') \in E$ impliceert dat $(\varphi(v), \varphi(v')) \in F$.
Er hoeven tussen twee grafen geen graafhomomorfismen te bestaan, bijvoorbeeld als $\mathcal{G}$ een lus, d.w.z. een pijl (v, v), heeft en $\mathcal{H}$ niet.

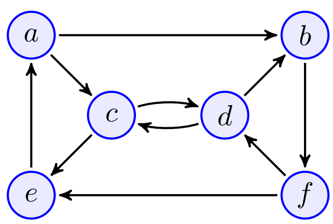
Construeer alle surjectieve graafhomomorfismen van $\mathcal{G}$ naar $\mathcal{H}$ als hieronder, of bewijs dat zulke homomorfismen niet bestaan.

N.B. Surjectief betekent dat $\varphi(V) = W$.

$\mathcal{G}$:



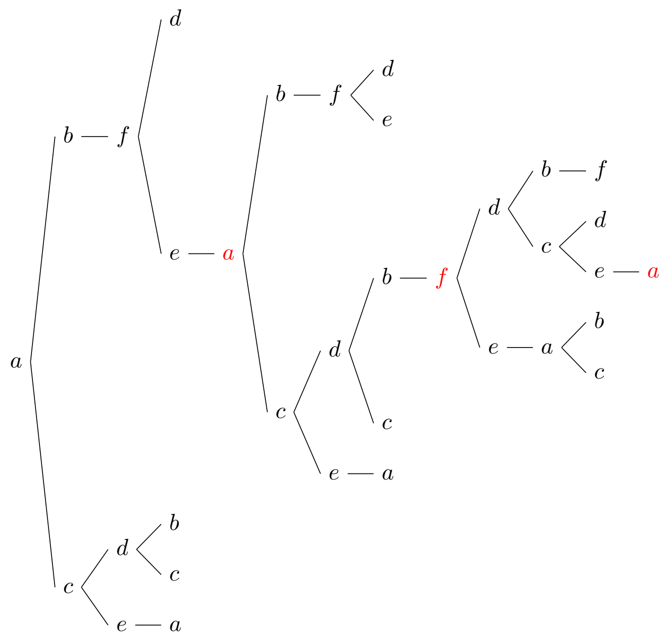
$\mathcal{H}$:



Er zijn miljoenen surjectieve afbeeldingen van de knopen verzameling van $\mathcal{G}$ naar die van $\mathcal{H}$. Het is dus handig zo snel mogelijk de 'pijlen behoudseis' te gebruiken. Maak het volgende lijstje van mogelijke pijlen in $\mathcal{H}$:

$$a \to \{b, c\},\ b \to f,\ c \to \{d, e\},\ d \to \{b, c\},\ e \to a,\ f \to \{d, e\}.$$

Omdat 1 en 10 twee binnenkomende pijlen hebben is het handig een φ-waarde voor een van deze twee te kiezen als start, zeg $\varphi(1) = a$. Maak dan een boom van mogelijke opvolgers, terwijl je in $\mathcal{G}$ het pad $1, 7, 10, 4, 1, 6, 9, 3, 10, 5, 2, 8, 1$ doorloopt. Het aantal takken neemt exponentieel toe (vaart: gulden snede), maar er kan op bepaalde momenten gesnoeid worden als je weer langs 1 of 10 komt:



We lezen af dat φ met

$$\begin{aligned}
&\varphi(1) = a, \quad \varphi(7) = b,\ \varphi(10) = f,\ \varphi(4) = e,\ \varphi(6) = c,\\
&\varphi(9) = d, \quad \varphi(3) = b,\ \varphi(5) = d,\ \varphi(2) = c,\ \varphi(8) = e,
\end{aligned}$$

een surjectief graafhomomorfisme is.
We kunnen hetzelfde doen met $\varphi(1) = b$, dit levert het surjectief homomorfisme

$$\begin{aligned}
&\varphi(1) = b, \quad \varphi(7) = f,\ \varphi(10) = e,\ \varphi(4) = a,\ \varphi(6) = f,\\
&\varphi(9) = d, \quad \varphi(3) = c,\ \varphi(5) = a,\ \varphi(2) = c,\ \varphi(8) = d.
\end{aligned}$$

Met startwaarde $\varphi(1) = c$, krijgen we wel een graafhomomorfisme, maar dan een die niet surjectief is (het beeld onder φ is de verzameling $\{c, d\}$).
Tenslotte kunnen we de twee oplossingen met $\varphi(1) = e$ en $\varphi(1) = f$ eenvoudig verkrijgen uit de twee eerste oplossingen via de symmetrie operatie $a \leftrightarrow f,\ b \leftrightarrow e,\ c \leftrightarrow d$. Conclusie: er zijn 4 surjectieve graafhomomorfismen.

Naschrift Het bestaan van zulke surjectieve graafhomomorfismen is belangrijk bij de classificatie van bepaalde symbolische dynamische systemen.

2. Frobeniusnorm

Dr. M.E. (Michiel) Hochstenbach, Technische Universiteit Eindhoven

Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $B = Q^TAQ$, waarbij $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonaal is, d.w.z. $QQ^T = Q^TQ = I$. Bewijs dat $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2$.

Een mogelijk bewijs is via de "trace" (spoor). De Frobenius norm is namelijk afgeleid van het spoor-inproduct:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 &= \mathrm{trace}(A^TA) = \mathrm{trace}((Q^TBQ)^T(Q^TBQ)) \\ &= \mathrm{trace}(Q^TB^TQQ^TBQ) = \mathrm{trace}(Q^TB^TBQ) \\ &= \mathrm{trace}(QQ^TB^TB) = \mathrm{trace}(B^TB) \\ &= \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2.\end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruikt dat het spoor invariant is onder cyclische permutaties:

$$\mathrm{trace}(XY) = \mathrm{trace}(YX).$$

Een ander bewijs, wellicht meer elementair, gebruikt dat voor vectoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ de Frobenius norm gelijk is aan de 2-norm; dus, voor een willekeurige orthogonale matrix Q:

$$\|Q\mathbf{x}\|_F^2 = \|Q\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Als $\mathbf{a}_j$ de j-de rij is van A geldt dus

$$\|QA\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|Q\mathbf{a}_j\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|\mathbf{a}_j\|_2^2 = \|A\|_F^2.$$

Ook

$$\|AQ\|_F^2 = \|Q^TA^T\|_F^2 = \|A^T\|_F^2 = \|A\|_F^2.$$

3. 2014 lijnstukjes

A. (Arne) Smeets, K.U. Leuven

Binnen een cirkel met straal 1 liggen 2014 lijnstukjes. De som van de lengten van deze lijnstukjes is minstens 90. Bewijs dat er een cirkel bestaat die concentrisch is met de gegeven cirkel en die minstens twee van deze lijnstukjes snijdt.

Door elk van de lijnstukjes over 360° te roteren rond het middelpunt van de cirkel vinden we 2014 ringvormige gebieden binnen de gegeven cirkel. Het volstaat om aan te tonen dat twee van deze gebieden elkaar overlappen. Dat is zeker het geval wanneer de som van de oppervlakten van deze ringvormige gebieden minstens zo groot is als de oppervlakte van de cirkel.

Zij O het middelpunt. Zij $[AB]$ een lijnstuk binnen de cirkel met lengte ℓ zodat (zonder verlies van de algemeenheid) $OA \geq OB$. Wanneer de projectie P van O op de rechte AB op het lijnstuk $[AB]$ ligt, dan is de oppervlakte van het ringvormig gebied bepaald door $[AB]$ gelijk aan $\pi(OA^2 - OP^2) = \pi AP^2 \geq \frac{1}{4}\pi\ell^2$. Wanneer P *niet* op $[AB]$ ligt, dan is de oppervlakte van het gebied bepaald door $[AB]$ gelijk aan $\pi(OA^2 - OB^2) > \pi AB^2 = \pi\ell^2 > \frac{1}{4}\pi\ell^2$ (want ΔOAB heeft een stompe hoek in B).

Het volstaat nu om het volgende te bewijzen: als $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{2014}$ positieve reële getallen zijn met som minstens 90, dan is

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + \cdots + \ell_{2014}^2 > 4.$$

Dat volgt uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + \cdots + \ell_{2014}^2 \geq \frac{1}{2014} \cdot (\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{2014})^2 \geq \frac{1}{2014} \cdot 90^2 > 4.$$

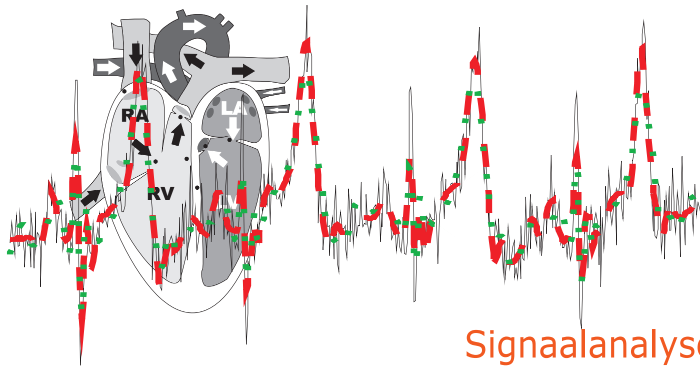
Maastricht University

Master Operations Research

Department of Knowledge Engineering
Operations Research met een *couleur locale*

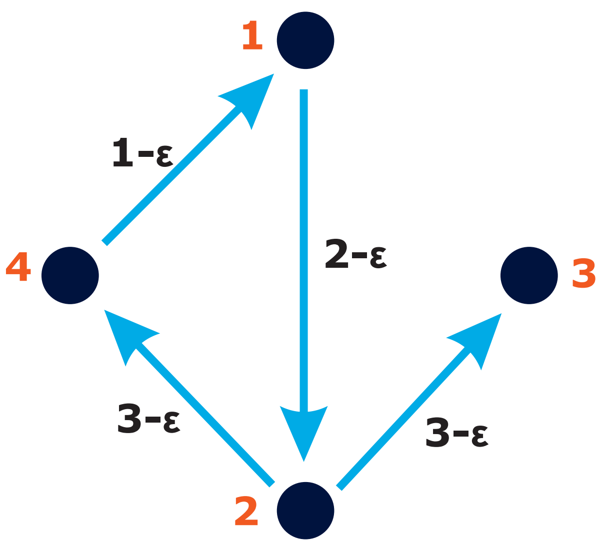
Operations Research

is de studie waarin je leert hoe je wiskunde kunt gebruiken om de beste keuzes te maken! Dat kan gaan om klassieke problemen als het bepalen van de kortste route tussen twee punten of om de ideale verdeling van taken over een aantal teamleden. Maar...



Signaalanalyse

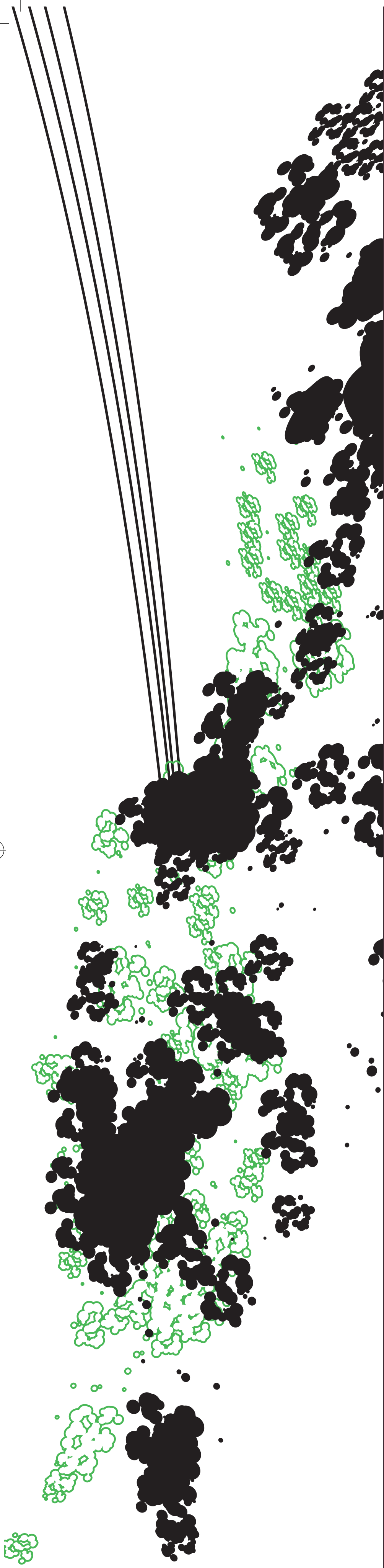
...je leert bijvoorbeeld ook om specifieke hartproblemen te detecteren op basis van een hartfilmpje, om afwijkende structuren in DNA sequenties te ontdekken, om de beste keuzes te bepalen onder strategische omstandigheden, of zelfs om stabiliteitsvraagstukken in dynamische evolutionaire processen te beantwoorden. In de Maastrichtse master Operations Research komen deze en gerelateerde vraagstukken aan de orde. Onze bachelor Knowledge Engineering biedt hiertoe een ideale voorbereiding. Ook met je bachelor wiskunde of econometrie ben je hierop prima voorbereid.



Strategische beslissingen

Come check us out!

Wil je meer weten? Bezoek een Open Dag!
Of neem contact op met: info-dke@maastrichtuniversity.nl
http://www.maastrichtuniversity.nl/dke
https://project.dke.maastrichtuniversity.nl/nso
https://project.dke.maastrichtuniversity.nl/bmi



CHOOSE YOUR MASTER IN TWENTE!

MASTER
APPLIED MATHEMATICS

Specializations

- Operations Research
- Mathematical Physics and Computational Mechanics
- Mathematics and Applications of Signals and Systems

3TU MASTER
SYSTEMS & CONTROL

www.utwente.nl/master/am
www.utwente.nl/master/sc

UNIVERSITY OF TWENTE.

4. Kumar-conditie

H.S. (Simeon) Nieman MSc., Westfälische Wilhelms-Universität Münster

We bekijken rijtjes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ van getallen $a_i \in \mathbb{C}$. Een dergelijk rijtje voldoet aan de zogeheten *Kumar-conditie*, wanneer voor elk natuurlijk getal n de aaneengesloten deelrijtjes van lengte n, $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n-1})$, de vectorruimte $\mathbb{C}^n$ opspannen. (merk op dat deze deelrijtjes hier als vectoren van lengte n opgevat worden) Bewijs dat het rijtje $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$ aan de Kumar-conditie voldoet.

We merken eerst op dat de Kumar-conditie neerkomt op het voor elke $n \in \mathbb{N}$ vinden van n deelrijen van lengte n in (a_i) die een basis voor $\mathbb{C}^n$ vormen. Plan van aanpak is dus om in het gegeven rijtje een basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ voor $\mathbb{C}^n$ te vinden. Hiertoe zoeken we (rij-)vectoren $v_1, \ldots, v_n$ die voldoen aan

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^*.$$

Wanneer je nu vermoedt dat $\langle (1, \ldots, \frac{1}{n}), (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1}), \ldots, (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{2n-1}) \rangle = \mathbb{C}^n$, heb je gelijk. Dit direct te bewijzen is echter verre van een pretje. De bijbehorende determinant blijkt $\frac{(1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot (n-1)!)^3}{n!\cdot (n+1)!\cdot \ldots \cdot (2n-1)!}$ te zijn.[1]

Het is echter mogelijk de vectoren anders te kiezen, beginnende met $v_1 = (1, \ldots, \frac{1}{n})$. We kiezen nu een priemgetal p_2 dat geen van $2, 3, \ldots, n$ deelt en definiëren $v_2 = (\frac{1}{p_2-1}, \frac{1}{p_2}, \ldots, \frac{1}{p_2+n-2})$. Tegelijkertijd is v_2' de vector die we verkrijgen als $v_2 - \lambda v_1$, zodanig dat de eerste coördinaat gelijk nul wordt. We kunnen nu verder gaan: we kiezen een priemgetal p_i dat geen van de tellers en noemers in $v_1, v_2', \ldots, v_{i-1}'$ deelt en definiëren $v_i = (\frac{i}{p_i - i}, \ldots, \frac{1}{p_i}, \ldots, \frac{1}{p_i+n-i-1})$, het deelrijtje met $\frac{1}{p_i}$ op plek i. De vector v_i' wordt nu uit v_i verkregen door achtereenvolgens de eerste coördinaat met v_1 te vegen, de tweede met v_2', etc. Dankzij onze keuze van p_i zien we nu dat de $i$de coördinaat van v_i' niet nul kan zijn.

Aangezien vegen van een matrix de determinant niet verandert, is de determinant van de matrix gevormd door de vectoren v_i, $\det(\mathbf{v})$, gelijk aan de determinant $\det(\mathbf{v}')$, gevormd door de geveegde vectoren v_i' (waar $v_1' = v_1$). Dankzij de constructie en de opmerking dat elke v_i' als $i$de coördinaat niet nul is, weten we dat de matrix $\mathbf{v}'$ een bovendriehoeksmatrix is met alleen niet-nul elementen op de diagonaal. De conclusie is dat $\det(\mathbf{v}) = \det(\mathbf{v}') \in \mathbb{C}^*$ en dat de vectoren/deelrijtjes $v_1, \ldots, v_n$ een basis van $\mathbb{C}^n$ vormen.

[1] Thomas Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, Dover Publications Inc., 1960.

5. Covariantieparadox

Dr. ir. T. (Tom) Verhoeff, Technische Universiteit Eindhoven

De covariantie $cov(X,Y)$ tussen twee stochastische variabelen X en Y (zie verderop voor een definitie) is een maat voor de afhankelijkheid tussen die twee variabelen. Een positieve covariantie betekent dat grotere waarden van X neigen samen te gaan met grotere waarden van Y. Bij een negatieve covariantie is het verband omgekeerd: een grotere waarde van X neigt samen te gaan met een kleinere waarde van Y.

(a) Definieer drie identiek verdeelde stochastische variabelen X_i $(i = 1, 2, 3)$ met verwachting 0, zodanig dat geldt

$$cov(X_i, X_j) < 0 \text{ voor } i \neq j$$

en geef ook de covarianties $cov(X_i, X_j)$. De X_i zijn derhalve onderling *afhankelijk*. Ze mogen discreet of continu verdeeld zijn.

Het paradoxale is dat als X_1 een grotere uitkomst heeft, dan neigt X_2 naar een kleinere uitkomst. Terwijl als X_2 een kleinere uitkomst heeft, X_3 weer neigt naar een grotere uitkomst. En toch is het ook zo dat als X_1 een grotere uitkomst heeft, dat dan X_3 juist neigt naar een kleinere uitkomst.
Ter herinnering het volgende.

- De verwachting van X wordt genoteerd als $\mathrm{E}X$.
- Verwachting is linear:

$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}X + b\mathrm{E}Y$$

- De covariantie $cov(X,Y)$ tussen X en Y is gedefinieerd door

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y))$$

- Er geldt (vanwege lineariteit van verwachting):

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y$$

In onze oplossing zijn er drie uitkomsten voor (X_1, X_2, X_3):

$$\Omega = \{ (2,-1,-1), (-1,2,-1), (-1,-1,2) \}$$

waarbij elke uitkomst kans 1/3 heeft. Er geldt dan $\Pr(X_i = 2) = 1/3$ en $\Pr(X_i = -1) = 2/3$. De verwachting van X_i is derhalve

$$(2 - 1 - 1)/3 = 0$$

Voor de covarianties geldt vervolgens

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X_i, X_j) &= \mathrm{E}(X_i X_j) \\ &= (2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1))/3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Merk op dat met deze definitie de waarde van $X_1 + X_2 + X_3$ constant is. Daardoor zijn de covarianties negatief: als een X_i een grotere uitkomst heeft, dan zijn de andere twee noodzakelijkerwijs kleiner.
Ik kwam dit in de praktijk tegen toen ik voor de optimale strategie om solitaire Yahtzee te spelen de covarianties tussen de scores in elke van de deelcategorieën bepaalde.[2] Het blijkt dat de scores in de categorieën Enen, Tweeën, Drieën en Vieren onderling paarsgewijs negatief gecorreleerd zijn. Aanvankelijk vond ik dat merkwaardig.

[2]www-set.win.tue.nl/ wstomv/misc/yahtzee/trivia.html

6. Pythagoreïsche driehoeken

Prof. dr. J.M.A.M. (Jan) van Neerven, Technische Universiteit Delft

Laat zien dat de oppervlakte van een rechthoekige driehoek waarvan alle zijden geheeltallige lengte hebben geen kwadraat kan zijn.

Stel dat er Pythagoreïsche driehoeken bestaan met kwadratische oppervlaktes. Zij w^2 de kleinste oppervlakte waarvoor zo een driehoek bestaat. Zij x en y de benen van een Pytagoreïsche driehoek met oppervlakte w^2. Dan $x^2+y^2 = z^2$ voor een $z \in \mathbb{N}$ en $\frac{xy}{2} = w^2$. Omdat w minimaal is, moeten x en y relatief priem zijn en, zonder verlies van algemeenheid, neem aan dat x oneven is en y even. (Via congruentie modulo 4 volgt dat x en y niet allebei oneven zijn.)

Uit een bekende stelling voor Pythagoreïsche driehoeken volgt nu dat er positieve gehele getallen r en s bestaan die relatief priem zijn en waarvan precies een van de twee oneven is, zodanig dat $x = r^2 - s^2$ en $y = 2rs$. Dus $(r^2 - s^2)rs = w^2$ en $\frac{s}{4} < s \leq w^2$. Aangezien r, s, $r-s$ en $r+s$ paarsgewijs relatief priem zijn en aangezien $(r-s)(r+s)rs = w^2$, volgt hieruit dat er positieve gehele getallen a, b, c en d bestaan zodanig dat $r = a^2$, $s = b^2$, $a^2 - b^2 = r - s = c^2$ en $a^2 + b^2 = r + s = d^2$.

Merk op dat c en d relatief priem zijn sinds $r - s$ en $r + s$ relatief priem zijn. Merk ook op dat c en d oneven zijn (omdat precies een van r en s oneven is), zij nu $X = \frac{c+d}{2}$ en $Y = \frac{d-c}{2}$. Dan zijn X en Y relatief priem en $X^2 + Y^2 = a^2$. Dan is een van X en Y even, en $\frac{XY}{2} = \frac{d^2-c^2}{8} = \frac{b^2}{4} = \frac{s}{4}$ is een kwadratisch geheel getal. Aangezien de driehoek met zijdes X, Y en a een Pythagoreïsche driehoek is met oppervlakte $\frac{s}{4}$, volgt uit de minimaliteit van w^2 dat $w^2 < \frac{s}{4}$. Tegenspraak.[3]

[3]Bewijs uit: W.S. Anglin, The American Mathematical Monthly, Vol. 97, No. 2 (Feb., 1990), pp. 120-124, lemma 1

Universiteit van Amsterdam

Aan de UvA maak je werk van je master

WWW.UVA.NL/SCIENCE-MASTERS

Kies voor één van de wiskundige masters aan de Universiteit van Amsterdam!

- Mathematics
- Mathematical Physics
- Stochastics and Financial Mathematics

Wiskunde Onderzoekschool nederland

2014/15

The Dutch Research School in Mathematics

WONDER is the *Dutch Research School in Mathematics,* coordinating the national master and graduate program and training of (prospective) PhD students.

see http://web.science.uu.nl/wonder

> In for a challenge? Take up a **WONDER advanced course in mastermath**. In 2014-2015 we offer courses on abelian varieties, advanced algebraic geometry, analytic methods in discrete mathematics, percolation and topological methods for differential equations

> Take part in a **WONDER school for graduate students**. In 2014-2015 we expect to have schools on financial mathematics, geometry and quantum theory, nonlinear dynamics, stochastics, etc.

> Take part in the **WONDER minicourse**. In 2014-2015 it will be about non-archimedean geometry.

> All graduated students automatically participate in a competition for the **Stieltjes prize** for the best Dutch PhD thesis in mathematics.

7. Bovengrens

Josse van Dobben de Bruyn BSc., Universiteit Leiden

In deze opgave gaan we ervan uit dat $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. We beschouwen de verzameling $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Zoals je wellicht weet, geldt $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Een functie $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ noemen we een *bijna-bovengrens* voor een deelverzameling $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ als de verzameling $X_f \subseteq \mathbb{N}$ gegeven door

$$X_f = \{n \in \mathbb{N} : f(n) > g(n)\}$$

eindig is voor alle $f \in \mathcal{F}$. We eisen hierbij niet dat g een element is van $\mathcal{F}$. Een verzameling Y heet bovendien *aftelbaar* als een van de volgende (equivalente) eigenschappen geldt:

- Er geldt ofwel $|Y| = |\mathbb{N}|$, dan wel $|Y| = k$ voor een of andere $k \in \mathbb{N}$.
- Er bestaat een surjectieve functie $h_1 : \mathbb{N} \to Y$.
- Er bestaat een injectieve functie $h_2 : Y \to \mathbb{N}$.

Geef een bewijs of vind een tegenvoorbeeld voor de volgende uitspraken:

(a) Als $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een bijna-bovengrens is voor $\mathcal{F}$, dan is $\mathcal{F}$ aftelbaar.

(b) Als $\mathcal{F}$ aftelbaar is, dan bestaat er een bijna-bovengrens voor $\mathcal{F}$.

Je mag alle welbekende eigenschappen van aftelbare verzamelingen (zonder bewijs) gebruiken: het product van eindig veel aftelbare verzamelingen is aftelbaar, de aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is aftelbaar, enzovoort. (Let daarbij wel op dat je geen eigenschap claimt die niet waar is.) Daarnaast mag je gebruiken dat de verzamelingen $2^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ allemaal overaftelbaar zijn.

1. Deze uitspraak is onjuist. Laat $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijvoorbeeld gedefinieerd zijn door $g(n) = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Nu definiëren we de verzameling $\mathcal{F} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Het is duidelijk dat g een bijna-bovengrens is voor $\mathcal{F}$: het is zelfs een daadwerkelijke bovengrens. Aan de andere kant geldt $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$, en dus zien we dat $\mathcal{F}$ overaftelbaar is. $\square$

2. Deze uitspraak is wel waar. Laat $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een willekeurige aftelbare verzameling zijn en laat $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ een rijtje zijn dat alle elementen van $\mathcal{F}$ bevat. (Met andere woorden: de functie $\mathbb{N} \to \mathcal{F}$ gegeven door $n \mapsto f_n$ is surjectief.) Nu definiëren we $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ door

$$g(n) = \max\{f_i(n) : i \leq n\}.$$

Merk op dat het maximum altijd bestaat, gezien de verzameling $\{f_i(n) : i \leq n\}$ eindig is voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bekijken we nu een vast element $f_i \in \mathcal{F}$, dan zien we dat $f_i(n) \leq g(n)$ geldt voor alle $n \geq i$. De verzamelingen X_f, zoals gedefinieerd in de opgave, zijn dus allemaal eindig. We zien dat g inderdaad een bijna-bovengrens is voor $\mathcal{F}$. $\square$

8. Verzamelingen

Prof. dr. R. (Rob) Tijdeman, Universiteit Leiden

(a) Bepaal alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ zodanig dat $|3x^2 - 7xy + 3y^2 - 6| \leq 1$. (3 punten)

(b) Bepaal alle $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ zodanig dat $|x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2| \leq 4$. (7 punten)

a) We have to find all $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ such that $3x^2 - 7xy + 3y^2 \in \{5, 6, 7\}$.
The determinant of the quadratic form is 13. Therefore we work modulo 13.
We have $3x^2 - 7xy + 3y^2 \equiv -10x^2 - 20xy - 10y^2 = -10(x + y)^2 \equiv 3(x + y)^2 \pmod{13}$.
Since the values modulo 13 of $3a^2$ are $\{0, \pm1, \pm3, \pm4\}$ for $a = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6$, inequality a) has no solutions.

b) We have

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 = (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z).$$

Hence $x + y + z = 0$ or $x + y - z = 0$ or $x - y + z = 0$ or $x - y - z = 0$ or

$$0 < |x + y + z| \leq a \text{ and } 0 < |x + y - z| \leq b \text{ and } 0 < |x - y + z| \leq c \text{ and } 0 < |x - y - z| \leq d$$

for positive integers a, b, c, d with $abcd \leq 4$.
If a factor is 0, then we can choose x, y freely and z is uniquely determined by this choice.
Otherwise it follows that the sum of any two of a, b, c, d is at most 5.
By adding the first and last inequalities we find $2|x| \leq 5$ and therefore $|x| \leq 2$.
By subtracting the first from the third inequality we obtain $|y| \leq 2$.
By subtracting the first from the second inequlity we find $|z| \leq 2$.
We make a 3 by 3 table where on one axis we choose the value of x^2 and on the other the value of y^2. Here we use that the initial inequality is in fact an inequality in x^2, y^2, z^2.
This leads to 6 quadratic polynomials in z^2 with integer coefficients:
$(x, y) = (0, 0)$ yields z^4
$(x, y) = (1, 0)$ and $(0, 1)$ yield $z^4 - 2z^2 + 1$,
$(x, y) = (2, 0)$ and $(0, 2)$ yield $z^4 - 8z^2 + 16$,
$(x, y) = (1, 1)$ yields $z^4 - 4z^2$,
$(x, y) = (2, 1)$ and $(1, 2)$ yield $z^4 - 10z^2 + 9$,
$(x, y) = (2, 2)$ yields $z^4 - 16z^2$.
By checking on both sides of the zeros of the polynomials in z^2, we obtain as the list of the solutions:
$(x, y, z) = (x, y, -x - y), (x, y, x + y), (x, y, y - x), (x, y, x - y)$ for all $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, and further $(x, y.z) = (\pm1, 0, 0), (0, \pm1, 0), (0, 0, \pm1), (\pm1, \pm1, \pm1)$.


NOTHING BEATS WINNING
Do you thrive on outsmarting your competition?
Flow Traders is looking for Junior Traders with excellent mathematical and analytical skills combined with an interest in global financial markets. In this challenging position you manage and optimize our daily position in a wide range of financial products.
If you want to be part of our winning team, don't hesitate to apply for the Junior Trader position via our website: www.flowtraders.com
For more information please email: careers.amsterdam@nl.flowtraders.com or call Floor de Wit on +31 (0)20 7996799.
Flow Traders is an international leading trading house.
FLOW TRADERS
Amsterdam • New York • Singapore

9. Vreemd(e) middelen

Dr. F.J. (Fokko) van de Bult, Technische Universiteit Delft

Gegeven twee positieve getallen a en b en een $p \in \mathbb{R}$ definiëren we het p-gemiddelde als

$$m_p(a,b) = \begin{cases} \left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} & p \neq 0 \\ \sqrt{ab} & p = 0 \end{cases}$$

Merk op dat de vreemde definitie van m_0 verklaard wordt door de vergelijking $m_0(a,b) = \lim_{p\to 0} m_p(a,b)$.[4] Je mag de standaardongelijkheden gebruiken die zeggen dat als $p < q$ dan

$$\min(a,b) \leq m_p(a,b) \leq m_q(a,b) \leq \max(a,b).$$

Kies nu twee getallen $p < q$. Dan definiëren we recursief de rijen a_k en b_k, door $a_0 = a$ en $b_0 = b$ en verder $a_k = m_p(a_{k-1}, b_{k-1})$, $b_k = m_q(a_{k-1}, b_{k-1})$ voor $k \geq 1$.

(a) Laat zien dat de rijen a_k en b_k convergeren en dat ze dezelfde limiet hebben.

Deze gezamelijke limiet van de rijen noemen we het p,q-gemiddelde $m_{p,q}(a,b)$.

(b) Laat zien dat $m_{-p,p}(a,b) = m_0(a,b)$.

(c) Laat zien dat $m_{0,2}(a,b) \leq m_1(a,b)$.

1. We bewijzen voor volledigheid eerst dat als $p < q$, dan

$$\min(a,b) \leq m_p(a,b) \leq m_q(a,b) \leq \max(a,b). \tag{9.1}$$

De eerste en laatste ongelijkheid zijn triviaal en de middelste kun je op veel manieren bewijzen. De mooiste vind ik via Jensen: Stel $q > 0$ en $p \neq 0$. Neem nu de functie $f(x) = x^{q/p}$. Als $p, q > 0$ dan is de exponent groter dan 1 en is de functie dus convex, als $p < 0$ en $q > 0$ is de exponent negatief en is f ook convex. In beide gevallen krijgen we met behulp van Jensen's ongelijkheid

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{q/p} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{x^{q/p}+y^{q/p}}{2}.$$

Subsitueer nu $x = a^p$, $y = b^p$ en neem de $1/q$'de macht aan beide kanten (we hadden $q > 0$ dus dit laat het teken hetzelfde), dan krijgen we

$$\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} \leq \left(\frac{a^q+b^q}{2}\right)^{1/q}.$$

In het geval $q < 0$ wordt dezelfde f juist concaaf, en klapt daardoor het teken van de ongelijkheid om. Omdat nu $q < 0$ klapt het teken echter nog een keer om bij het tot de macht $1/q$ verheffen, en houden we dezelfde ongelijkheid. Voor het geval $p = 0$ nemen we de convexe functie $f = e^x$ en krijgen we

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x+e^y}{2}$$

[4] Net zo kan men $m_{\pm\infty}(a,b)$ definiëren als $\lim_{p\to\pm\infty} m_p(a,b)$, maar vandaag bekijken we alleen reële p.

wat na $x = q\log(a)$ en $y = q\log(b)$ en het verheffen van de ongelijkheid tot de macht $1/q$ oplevert dat

$$\sqrt{ab} = \left(e^{\frac{q\log(a)+q\log(b)}{2}}\right)^{1/q} \leq \left(\frac{a^q+b^q}{2}\right)^{1/q}.$$

Net zo voor $q = 0$ met de concave functie $\log(x)$.

Als gevolg van (9.1) gaan we het volgende lemma bewijzen

Lemma 1. *Voor alle $k \geq 1$ geldt $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$.*

Bewijs. We merken eerst op dat $a_k = m_p(a_{k-1}, b_{k-1}) \leq m_q(a_{k-1}, b_{k-1}) = b_k$ voor $k \geq 1$. Dan volgt ook dat

$$\min(a_k, b_k) = a_k \leq m_p(a_k, b_k) = a_{k+1} \leq m_q(a_k, b_k) = b_{k+1} \leq \max(a_k, b_k) = b_k. \quad \square$$

□

We concluderen dat a_k een stijgende rij is, en dat b_k een dalende rij is. Bovendien wordt de rij a_k van boven begrensd door b_1 en de rij b_k van onder begrensd door a_1. Met behulp van de monotone convergentie stelling zien we dan dat beide rijen convergent zijn. Voor de limieten $\lim_{k\to\infty} a_k = a_\infty$ en $\lim_{k\to\infty} b_k = b_\infty$ geldt dan dat

$$a_\infty = \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} m_p(a_k, b_k) = m_p(a_\infty, b_\infty),$$

wegens continuïteit van m_p. Omdat $a_k \leq b_k$ voor alle k volgt bovendien dat $a_\infty \leq b_\infty$. Omdat er geldt dat $m_p(x, y) > x$ als $y > x$ volgt dat $a_\infty = b_\infty$ zoals gevraagd.

2. Het antwoord staat in het volgende lemma:

Lemma 2. *Er geldt $m_{-p,p}(a, b) = m_0(a, b) = \sqrt{ab}$.*

Bewijs. We bewijzen met inductie dat $m_0(a_k, b_k) = m_0(a, b)$. Voor $k = 0$ is dit duidelijk. Daarna geldt voor $k \geq 0$ dat

$$\begin{aligned} m_0(a_{k+1}, b_{k+1}) &= \sqrt{\left(\frac{a_k^p + b_k^p}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{a_k^{-p} + b_k^{-p}}{2}\right)^{-1/p}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a_k^p + b_k^p}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{2}{a_k^{-p} + b_k^{-p}}\right)^{1/p}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a_k^p + b_k^p}{a_k^{-p} + b_k^{-p}}\right)^{1/p}} \\ &= \sqrt{\left(a_k^p b_k^p\right)^{1/p}} = m_0(a_k, b_k). \end{aligned}$$

Met behulp van de inductiehypothese vinden we dan dat

$$m_0(a_{k+1}, b_{k+1}) = m_0(a_k, b_k) = m_0(a, b).$$

Vervolgens zien we dat ook

$$m_{-p,p}(a, b) = a_\infty = m_0(a_\infty, b_\infty) = \lim_{k\to\infty} m_0(a_k, b_k) = \lim_{k\to\infty} m_0(a, b) = m_0(a, b).$$

waarbij we gebruiken dat het gemiddelde van twee gelijke getallen gelijk is aan dat getal, en dat m_0 continu is. □

3. We bewijzen eerst met inductie naar k dat

$$m_1(a_k, b_k) \leq m_1(a, b)$$

voor elke k. Voor $k = 0$ is dit triviaal. Vervolgens geldt omdat $\sqrt{x}$ een concave functie is met behulp van Jensen

$$\begin{aligned} m_1(a_{k+1}, b_{k+1}) &= \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} = \frac{\sqrt{a_k b_k} + \sqrt{\frac{a_k^2 + b_k^2}{2}}}{2} \\ &\leq \sqrt{\frac{a_k b_k + \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}(a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2)} = \frac{a_k + b_k}{2} = m_1(a_k, b_k). \end{aligned}$$

De inductiehypothese zegt dan dat $m_1(a_{k+1}, b_{k+1}) \leq m_1(a_k, b_k) \leq m_1(a, b)$. Nemen we dan de limiet $k \to \infty$ dan krijgen we

$$m_{0,2}(a, b) = a_\infty = m_1(a_\infty, b_\infty) = \lim_{k \to \infty} m_1(a_{k+1}, b_{k+1}) \leq m_1(a, b). \quad \square$$

10. Niet allemaal priem

Prof. dr. H.W. (Hendrik) Lenstra, Universiteit van Amsterdam

Laat $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij positieve gehele getallen zijn met de eigenschap dat voor elke $n \geq 0$ geldt $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Bewijs dat de getallen a_n niet allemaal priem zijn.

Het getal a_1 is oneven, dus de afbeelding $\sigma\colon x \mapsto 2x + 1 \pmod{a_1}$ is een permutatie van de getallen 0, 1, ..., $a_1 - 1$. We beweren dat voor elke $i \geq 0$ de congruentie $a_{i+1} \equiv \sigma^i(0) \bmod a_1$ geldt. Dit bewijst men met inductie naar i: voor $i = 0$ volgt het uit $a_1 \equiv 0 \bmod a_1$, en als het voor i waar is, volgt het voor $i+1$ uit $a_{i+2} = 2a_{i+1} + 1$ en de definitie van σ. Neem nu i gelijk aan de orde van σ. Dan geldt $\sigma^i(0) = 0$, dus $a_{i+1} \equiv \sigma^i(0) = 0 \bmod a_1$, en a_{i+1} is deelbaar door a_1; wegens $a_1 = 2a_0 + 1 > 1$ en $a_{i+1} > a_1$ volgt nu dat a_{i+1} samengesteld is.

11. Rijen

Prof. dr. G.J. (Gerhard) Woeginger, Technische Universiteit Eindhoven

Karakteriseer alle rijen $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ van reëele getallen die voldoen aan $x_0 = 1$ en

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - x_{n+1})^2 = 2.$$

Laten we aannemen dat er een rij bestaat die een minimale waarde aanneemt bij het linkerlid (aangezien het onderliggende lichaam oneindig dimensionaal is, is er wel weinig wiskundige aanleiding hiervoor). Door nu de eerste afgeleide naar x_n gelijk aan nul te stellen, krijgen we

$$x_{n+1} - \frac{5}{2}x_n + x_{n-1} = 0 \text{ for } n \geq 1. \tag{11.1}$$

Deze lineaire vergelijking heeft als algemene oplossing $x_n = c_1 2^n + c_2 2^{-n}$. Uit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty$ krijgen we vervolgens $c_1 = 0$, en uit $x_0 = 1$ krijgen we vervolgens $c_2 = 1$. Dus hebben we nu mogelijk de oplossing gevonden in $x_n = 2^{-n}$, nu moeten we nog aantonen dat dit ook de enige oplossing is. Om dit te doen, laten we eens aannemen dat er een reële rij $\langle x_n \rangle$ is met $x_0 = 1$, en laten we deze herparameteriseren als $x_n = y_n + 2^{-n}$ met reële y_n en $y_0 = 0$. Dan volgt daar snel uit dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(y_n + 2^{-n})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} y_n^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} y_n + \frac{4}{3} \tag{11.2}$$

en ook

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - x_{n+1})^2 &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(y_n - y_{n+1} + 2^{-n-1})^2 \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(y_n - y_{n+1})^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}(y_n - y_{n+1}) + \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n-1} \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(y_n - y_{n+1})^2 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} y_n + \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

De combinatie van deze twee levert

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - x_{n+1})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} y_n^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(y_n - y_{n+1})^2 + 2 \geq 2. \tag{11.4}$$

De laatste vergelijking is waar enkel als y_n overal gelijk is aan 0. Dit laat zien dat de enige oplossing voor het probleem $x_n = 2^{-n}$ is, en dat het hier dan ook gelijkheid betreft.