



LIMO 2016

# Opgaven

Hoofdsponsor:



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



UNIVERSITEIT TWENTE.



Universiteit Leiden



Universiteit Utrecht



KNAW

TU/e Technische Universiteit Eindhoven University of Technology



Maastricht University



KONINKLIJKE HOLLANDSCHE MAATSCHAPPIJ DER WETENSCHAPPEN



Radboud University



optiver

Wiskunde onderzoeckschool nederlande





**Dit opgavenboekje is een uitgave van  
de LIMO-commissie 2016:**

Gideon Jager, Nick Nauta, Robin Gravemaker, Jeroen Dekker, Hugo Sauerbier Couvée, Jeremy van der Heijden, Ismani Nieuweboer.

*e-mail:* [limo2016@nsaweb.nl](mailto:limo2016@nsaweb.nl)

*website:* [nsaweb.nl/limo2016](http://nsaweb.nl/limo2016)

Omslagontwerp: Casper Sauerbier Couvée  
Opgaven: Gerhard Woeginger, Christophe Debry, Arne Smeets, Hendrik Lenstra, Harold de Boer, Frans Oort, Raf Bocklandt, Han Peters, Sjoerd Boersma, Josse van Dobben de Bruyn, Michiel Dekking, Fokko van de Bult.

---

---

## Inhoudsopgave

---

1.	Vind ze allemaal!	4
2.	Infima van maxima	7
3.	Grafen kleuren	8
4.	De A van Abels	11
5.	Drie-eenvormige trapezia	12
6.	Oplossingen in paren	15
7.	Een sneetje spons	16
8.	Vermenigvuldigen met 2	18
9.	Goudkoorts	21
10.	Schaakborden en dominostenen	22
11.	Fibonacci matrices	25
12.	Complexe afbeeldingen van matrices	26



---

## Regels en tips

---

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Verzamel het werk per opgave in het daarvoor bestemde mapje.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Niet-grafische rekenmachines mogen gebruikt worden. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Voor drinken wordt tijdens de wedstrijd gezorgd. Er komt regelmatig iemand langs om vragen aan te kunnen stellen.

**Tips** die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is onderaan schuingedrukt de notatie en/of de terminologie toegelicht. Verder wordt met de natuurlijke getallen de verzameling  $\{1, 2, 3, \dots\}$  bedoeld, die we noteren met  $\mathbb{N}$ .
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven. Besteed dus gemiddeld meer tijd aan opgaven met lagere nummers.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bedenk waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk; vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes.** Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen. Dat kan relevant zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt, kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle  $n \in \mathbb{N}$ , probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor  $n = 1$  of  $n = 2$ . Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

---

**1. Vind ze allemaal!**

*Prof. dr. ir. G.J. (Gerhard) Woeginger  
Technische Universiteit Eindhoven*

---

Geef alle continue functies  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die voldoen aan

$$\int_0^\pi f(x) \sin^2 x \, dx = \sqrt{\pi/2} \quad \text{and} \quad \int_0^\pi f^2(x) \sin^2 x \, dx = 1.$$

# TU/e

Technische Universiteit  
**Eindhoven**  
University of Technology

**Op weg naar een mooie toekomst!!**



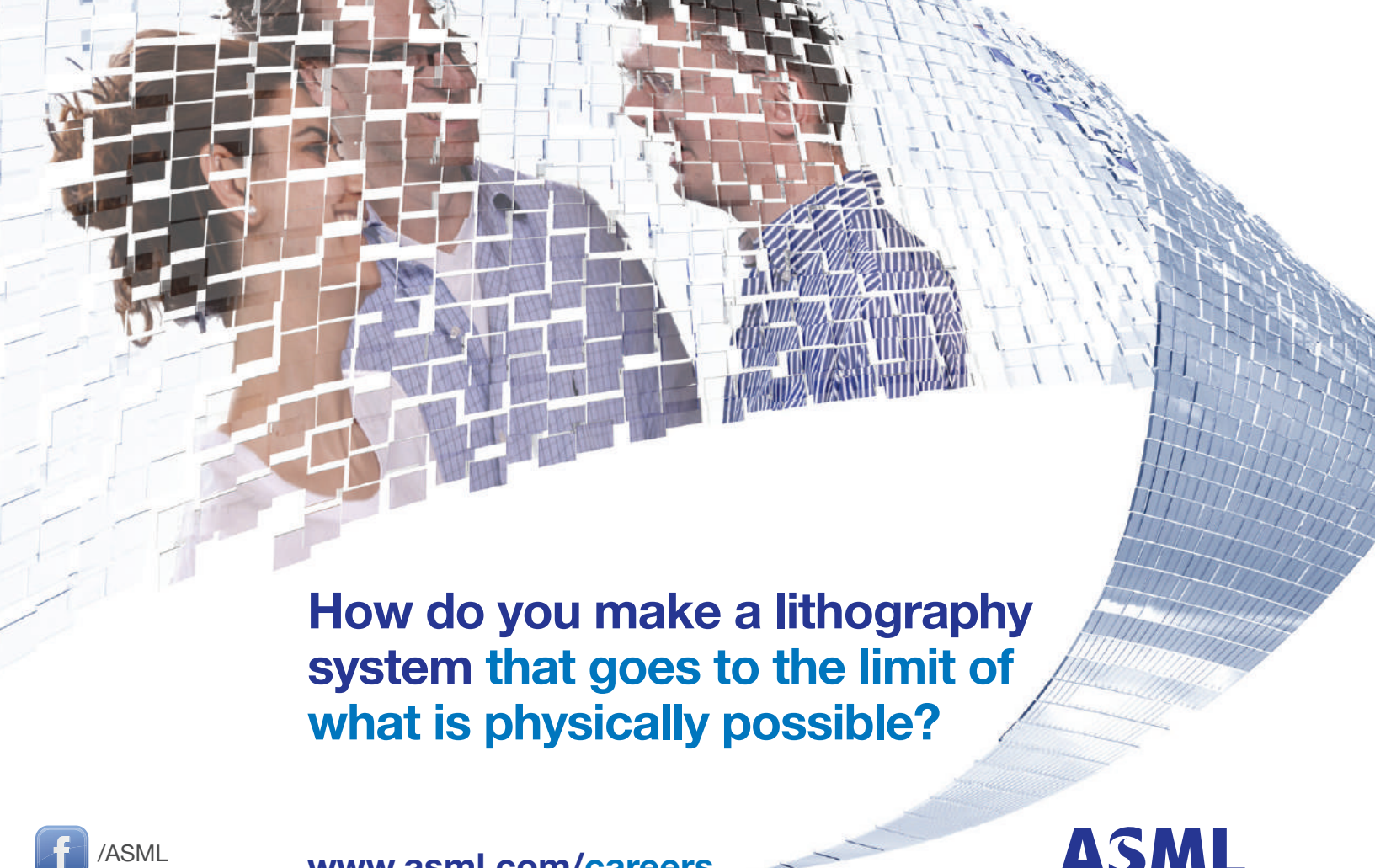
**Plan your future**



See [www.tue.nl/graduateprograms/iam](http://www.tue.nl/graduateprograms/iam)



**Industrial and Applied Mathematics**



**How do you make a lithography system that goes to the limit of what is physically possible?**

 /ASML

[www.asml.com/careers](http://www.asml.com/careers)

 @ASMLcompany

**ASML**

For students who think ahead

optiver 



---

**2. Infima van maxima**

*C.P. (Christophe) Debry MSc.  
KU Leuven, Universiteit van Amsterdam*

---

- (a) Bepaal het grootste reëel getal  $X$  zodat voor alle positieve reële getallen  $a$  en  $b$  geldt dat

$$\max(a^3 - 6b, b^3 - 6a) \geq X.$$

- (b) Bepaal het grootste reëel getal  $Y$  zodat voor alle positieve reële getallen  $a$  en  $b$  geldt dat

$$\max(a^3 - 6b + 13, b^3 - 6a) \geq Y.$$

---

### 3. Grafen kleuren

*Dr. A. (Arne) Smeets*  
*KU Leuven*

---

Zij  $n \geq 2$  een natuurlijk getal. Zij  $N$  het grootste natuurlijk getal met de volgende eigenschap: de volledige graaf op  $N$  hoekpunten kan gekleurd worden zodanig dat

- minstens 2 en hoogstens  $n$  kleuren gebruikt worden, en
- er geen enkele dichromatische driehoek voorkomt in de graaf, m.a.w. geen enkele driehoek gekleurd wordt met precies twee verschillende kleuren.

Zij  $\mathcal{V}$  de verzameling hoekpunten en  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  de verzameling kleuren. Zij  $\varphi : \mathcal{V} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$  de functie die aan een hoekpunt  $v \in \mathcal{V}$  en een kleur  $c_i \in \mathcal{C}$  het aantal zijden van de graaf toekent met  $v$  als eindpunt en kleur  $c_i$ .

Bewijs:

- (a)  $\varphi(v, c_i) \leq n - 2$  voor alle  $i$ ;
- (b)  $N \leq (n - 1)^2$ ;
- (c) bovenstaande ongelijkheid wordt een gelijkheid indien  $n - 1$  priem is.



# Katholieke Universiteit Leuven

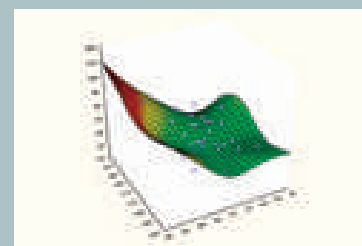
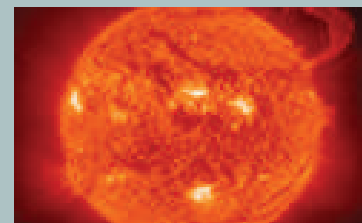
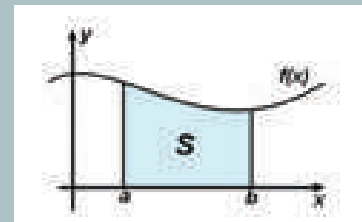
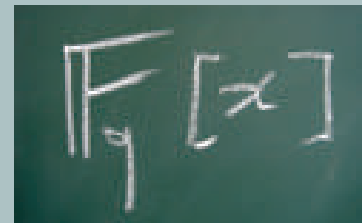
De KU Leuven, gesticht in 1425, is de oudste universiteit van de lage landen. Meer dan 7.932 onderzoekers zijn er actief in wetenschappelijk onderzoek en onderwijs. Op 1 maart 2016 telde de K.U.Leuven in totaal 56.555 ingeschreven studenten. Van de ingeschreven studenten heeft ongeveer 82% de Belgische nationaliteit, 18% heeft een andere EU-nationaliteit of komt van buiten de EU. Dit maakt van de gezellige provincie-hoofdstad Leuven een bruisende studentenstad met een rijk sociocultureel aanbod.

## Onderzoek aan het Departement Wiskunde

Het onderzoek aan het departement Wiskunde is georganiseerd op het niveau van de onderzoeksafdelingen:

- Afdeling Algebra: het onderzoek situeert zich in de algebraïsche meetkunde, getaltheorie, algebraïsche topologie en groepentheorie.
- Afdeling Analyse: in deze afdeling doet men onderzoek in de klassieke analyse (reële en complexe analyse) en in de functionaalanalyse.
- Afdeling Meetkunde: het onderzoek is gecentreerd rond differentiaalmeetkunde, in het bijzonder Riemannse en pseudo-Riemannse meetkunde en deelvariëteiten.
- Afdeling Plasma-astrofysica: het onderzoeksdomein van deze afdeling is de wiskunde van vloeistoffen en plasma's, het voornaamste studieobject is de zon. Dit onderzoek is gesitueerd in de toegepaste en computationele wiskunde.
- Afdeling Statistiek: deze afdeling is actief in de wiskundige statistiek, in het bijzonder de theorie van extreme waarden, robuuste statistiek en niet-parametrische methoden. Ook stochastische processen en financiële wiskunde komen aan bod. De afdeling is bovendien ook actief in toegepaste consultatie voor bedrijven.

Meer info op <http://wis.kuleuven.be>



Differentiaalmeetkunde II  
 Wiskundige logica II  
 Polaire ruimten  
 Galoismeetkunde  
 Lineaire algebraïsche groepen  
 Banachruimten en Banachalgebra's  
 Cliffordanalyse  
 Codeertheorie  
 Bewijstheorie  
 Representatietheorie en toepassingen  
 Eindige meetkunde  
 Infinitesimale analyse  
 Algebraïsche topologie en homologie algebra  
 Capita selecta in de logica  
 Transformatieanalyse  
 Incidentiemeetkunde  
 Capita selecta in de algebra  
 Capita selecta in de analyse  
 Capita selecta in de meetkunde  
 Partiële differentiaalvergelijkingen  
 Fysica van galaxieën  
 Relativiteitstheorie  
 Kwantumveldentheorie  
 Statistische fysica  
 Extragalactische sterrenkunde  
 Wisk. aspecten van algemene relativiteitstheorie  
 Kosmologie en galaxievorming  
 Kwantumelektrodynamica  
 Mechanica van continue media  
 Inleiding tot de dynamica van atmosferen  
 Kwantumcomputing  
 Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen  
 Wisk. modellering van artificiële intelligentie  
 Computeralgebra  
 Financiële wiskunde: discrete stochastische modellen  
 Algoritmische grafentheorie  
 Berekenbaarheid en complexiteit  
 Statistische besluitvorming  
 Stochastische processen  
 Capita selecta in de numerieke wiskunde  
 Financiële wiskunde: continue stochastisch. modellen  
 Capita selecta in soft computing  
 Benaderingsmethoden voor randwaardeproblemen  
 Causale analyse en ontbrekende gegevens  
 Overlevingsanalyse  
 Toegepaste functionaalanalyse  
 Kwalitatieve oplossingstechnieken in wetenschappelijke modellering  
 Geschiedenis van de wiskunde

# Wiskunde aan UGent

Aan de samenvloeiing van Leie en Schelde ligt de historische stad Gent, de provinciehoofdstad van Oost-Vlaanderen en met 67 000 studenten de grootste Vlaamse studentenstad. De Universiteit Gent is vandaag één van de belangrijkste universiteiten in het Nederlandse taalgebied.



De Gentse universiteit heeft een rijke wiskundige traditie en visitatiecommissies beoordeelden haar bachelor- en masteropleiding wiskunde als uitstekend. De studentenvereniging PRIME zorgt voor een stimulerende dynamiek onder wiskundestudenten.

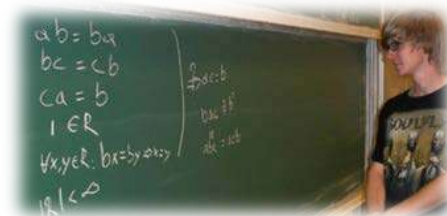
Het masterprogramma wiskunde biedt een grote individuele keuzevrijheid. Elke student kiest in het eerste masterjaar een major en minor. Daarnaast kiest de student in het tweede masterjaar een onderwerp voor een masterproef.

Major (30 ECTS)	Minor (30 ECTS)
Zuivere wiskunde of Wiskundige natuurkunde of Toegepaste wiskunde	Onderwijs of Onderzoek of Economie & verzekeringen
Masterproef (30 ECTS)	Keuzevakken (30 ECTS)
Tweede masterjaar	≥18 ECTS wiskundevakken

De keuze van de major geeft aan waar de interesses liggen binnen de wiskunde. De keuze van een minor bereidt voor op de arbeidsmarkt. Door de minor onderwijs kan de hele theoretische component van de lerarenopleiding in het masterprogramma worden opgenomen. In de minor onderzoek, die staat voor verdiepende specialisatie, kan de student kiezen voor seminarie, literatuurstudie of een (bedrijfs-)stage. De minor economie en verzekeringen bevat o.a. vakken die een voorbereiding kunnen vormen op een master actuariële wetenschappen.

Meer weten?

- [www.UGent.be](http://www.UGent.be)
- [www.wiskunde.UGent.be](http://www.wiskunde.UGent.be)
- [PRIME.UGent.be](http://PRIME.UGent.be)



---

#### 4. De A van Abels

*Prof. dr. H.W. (Hendrik) Lenstra  
Universiteit Leiden*

---

Laat  $A$  een groep zijn. We schrijven  $E$  voor de verzameling groepshomomorfismen van  $A$  naar zichzelf. Stel dat er een element  $b \in A$  bestaat waarvoor de afbeelding  $E \rightarrow A$  die  $f$  op  $f(b)$  afbeeldt bijtief is.

- (a) Is  $A$  noodzakelijk abels? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
- (b) Is  $A$  noodzakelijk cyclisch? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

---

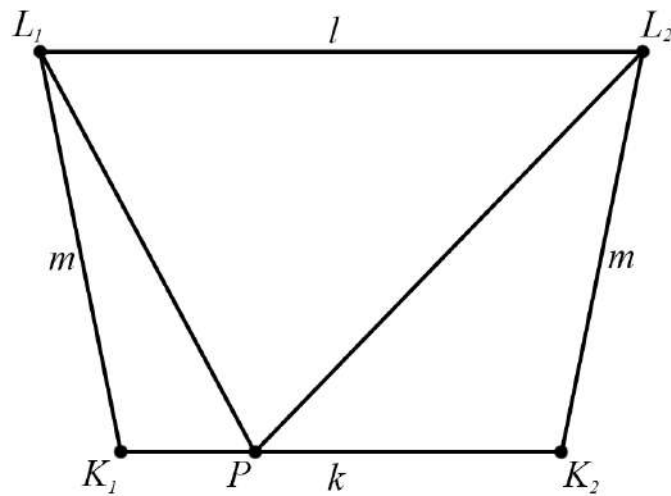
## 5. Drie-eenvormige trapezia

*Ir. H.M. (Harold) de Boer  
Transtrend BV*

---

We noemen een gelijkbenig trapezium met benedenbasis  $K_1K_2$  en (parallele) bovenbasis  $L_1L_2$  *drie-eenvormig*, wanneer we op  $K_1K_2$  een punt  $P$  kunnen vinden zodanig dat de lijnen  $L_1P$  en  $L_2P$  het trapezium opdelen in 3 gelijkvormige driehoeken. De lengte van de bovenbasis  $L_1L_2$  noemen we  $l$ ; de lengte van de benedenbasis  $K_1K_2$  noemen we  $k$ ; en voor de twee diagonalen geldt:  $|L_1K_1| = |L_2K_2| = m$ .

Geef, uitgedrukt in  $k$ ,  $l$  en  $m$ , de (voldoende en noodzakelijke) voorwaarden waaronder een gelijkbenig trapezium *drie-eenvormig* is.



Merk op: in de schets is  $l > k$ , maar dat hoeft niet zo te zijn. Het midden van de bovenbasis moet wel recht boven het midden van de benedenbasis liggen. Verder zijn de 3 driehoeken in deze schets overduidelijk niet gelijkvormig.



university of  
 groningen



## Master of Science in Mathematics / Applied Mathematics

### Mathematics

How does a bank check whether your digital signature is a valid one? Do the planets move in stable orbits or will they eventually collide? How can you write an algorithm that automatically detects whether an email message is spam? The mathematics behind these questions is dealt within the Master's degree programme in Mathematics.

The programme offers two specialisations:

- › Mathematics and Complex Dynamical Systems
- › Statistics and Big Data

In addition there is a possibility to follow a programme Science, Business and Policy

### Applied Mathematics

Why does one car have more air resistance than another? How can a satellite be kept in a stable orbit around the earth? Applied mathematicians provide the necessary theoretical background when trying to answer such questions, in close interaction with specialists from the field of application.

The programme offers two specialisations:

- › Systems and Control
- › Computational Mathematics

# Wiskunde onderzoek school nederland



The Dutch Research School in Mathematics

WONDER is the *Dutch Research School in Mathematics*, coordinating the national master and graduate

program and training of (prospective) PhD students. see <http://web.science.uu.nl/wonder>

- > In for a challenge? Take a **WONDER advanced course in mastermath**. 2016-2017 courses: complex networks, adv. combinatorics, queues & Levy fluctuation theory, Galois representations/automorphic forms, Bayesian statistics, semidefinite programming and topological methods for diff. eq.
- > Take part in a **WONDER school for graduate students**. In 2016-2017 we expect to have schools on financial mathematics, geometry and quantum theory, nonlinear dynamics, stochastics, etc.
- > Take part in a **WONDER minicourse**. Monitor the website for announcements.
- > All graduated students automatically participate in a competition for the **Stieltjes prize** for the best Dutch PhD thesis in mathematics.



---

## 6. Oplossingen in paren

*Prof. dr. F.J. (Frans) Oort  
Universiteit Utrecht*

---

Voor elk priemgetal  $p$  schrijven we

$$n(p) = \#\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{F}_p, y^2 = x^3 - 2016 \cdot x\}.$$

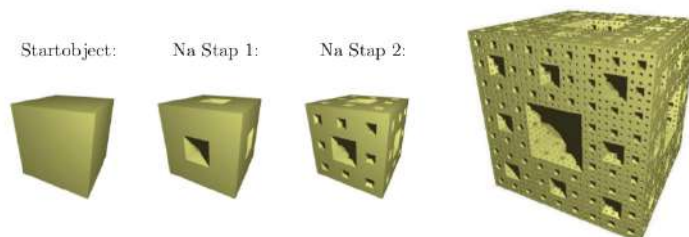
Bereken  $n(p)$  voor elk priemgetal  $p$  met  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Geef een bewijs dat het antwoord juist is.

Notatie:  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ .

## 7. Een sneetje spons

*Dr. R.R.J. (Raf) Bocklandt  
Universiteit van Amsterdam*

De mengerspons is een object in de ruimte dat men recursief kan construeren:  $M_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$  is een eenheidskubus met als middelpunt de oorsprong.  $M_{n+1}$  bestaat uit 20 kopieën van  $M_n$  die herschaald zijn met een factor  $1/3$  en geplaatst worden in de originele kubus zodat elk van de kopieën een ribbe gemeenschappelijk heeft met de originele kubus (we zetten dus geen kopieën in de middens van de zijvlakken en geen kopie in het middelpunt van de originele kubus).



De mengerspons is de doorsnede van alle  $M_n$ :  $M = \bigcap_i M_i$  en is een voorbeeld van een fractal.

De dimensie van een fractal wordt gedefiniëerd als de limiet van een rij:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{aantal kubusjes met zijde } 1/n \text{ nodig om } M \text{ te overdekken})}{\log n}.$$

Voor een volledig gevulde kubus is deze limiet 3, wat overeenkomt met onze intuïtieve notie van dimensie. Als we kijken naar de mengerspons en ons beperken tot de deelrij met  $n = 3^k$ , dan is het duidelijk dat deze fractal de volgende dimensie heeft:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 20^k}{\log 3^k} = \ln 20 / \ln 3 \approx 2.727.$$

Op analoge wijze kan je eenvoudig nagaan dat het zijvlak van een mengerspons een dimensie  $\ln 8 / \ln 3 \approx 1.893$  heeft.

Beschouw nu het vlak door het middelpunt van de kubus met normaal  $(1, 1, 1)$ :

$$\Pi : x + y + z = 0.$$

Dit vlak doorsnijdt de kubus in een regelmatige zeshoek en de mengerspons in een zeshoekvormige fractal. De opdracht is om de dimensie te bepalen van deze fractal.

- Schets  $M_1 \cap \Pi$ ,  $M_2 \cap \Pi$ . (en eventueel  $M_3 \cap \Pi$ )
- Stel  $n_k$  het aantal kubusjes met zijde  $3^{-k}$  in  $M_k$  die het vlak  $\Pi$  doorsnijden. Geef een recursief voorschrift voor  $n_k$  als functie van  $n_{k-1}$  en  $n_{k-2}$ . Houd er rekening mee dat zo'n kubusje dit vlak op verschillende manieren kan doorsnijden.
- Vorm dit recursief voorschrift om tot een expliciet voorschrift en gebruik dit om de dimensie van  $M \cap \Pi$  te bepalen:

$$\dim M \cap \Pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n_k}{\ln 3^k}.$$

- (d) Stel  $\Xi : ax + by + cz = 0$  een willekeurig vlak door het middelpunt van de kubus en kijk naar de dimensie van  $\Xi \cap M$ . Voor  $\Xi = \Pi$  is deze dimensie maximaal (maar dat moet je niet aantonen). Kan je een  $\Xi$  vinden waarvoor de dimensie zo klein mogelijk wordt?
- (e) Toon aan dat de dimensie van  $\Xi \cap M$  uit (4) inderdaad een ondergrens is.

---

## 8. Vermenigvuldigen met 2

*Dr. H. (Han) Peters*  
*Universiteit van Amsterdam*

---

Bij iteratieproblemen blijkt vaak dat zelfs de eenvoudigste functies al tot behoorlijk gecompliceerd gedrag kunnen leiden. We bekijken hier een aantal problemen die ontstaan bij het herhaaldelijk vermenigvuldigen met het getal 2.

Om preciezer te zijn definiëren we de functie  $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  gegeven door

$$f(x) = 2 \cdot x \pmod{1}.$$

Voor  $n \in \mathbb{N}$  definiëren we de  $n$ -de iteratie van  $f$  door  $f^1 = f$  en

$$f^n = f^{n-1} \circ f.$$

Een punt  $x \in [0, 1)$  heet periodiek van orde  $k \in \mathbb{N}$  als

$$f^k(x) = x$$

en

$$f^j(x) \neq x$$

voor  $1 \leq j < k$ . Een voorbeeld van een periodiek punt van orde 4 is het punt  $\frac{1}{5}$ , want  $\frac{1}{5} \mapsto \frac{2}{5} \mapsto \frac{4}{5} \mapsto \frac{3}{5} \mapsto \frac{1}{5}$ .

Schrijf nu

$$P_n = \{x \in [0, 1) : f^n(x) = x\}$$

en

$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_n.$$

(a) Bewijs dat de verzameling van periodieke punten  $P$  precies gelijk is aan de verzameling rationale getallen met oneven noemer, het getal  $0 = 0/1$  meegerekend.

Het blijkt dat de periodieke punten niet alleen dicht liggen in  $[0, 1)$ , maar zich in zekere zin zelfs gelijkelijk verspreiden over het interval  $[0, 1)$ .

We zeggen dat een rij  $(E_n)$ , bestaande uit eindige deelverzamelingen van  $[0, 1)$ , zich gelijkelijk verspreiden over  $[0, 1)$  als voor elk niet-leeg open interval  $(a, b) \subset [0, 1)$  geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(E_n \cap (a, b))}{\#E_n} = b - a.$$

(b) Bewijs dat de rij  $(P_n)$  zich gelijkelijk verspreidt over  $[0, 1)$ .



# CHOOSE YOUR MASTER IN TWENTE!

## MASTER APPLIED MATHEMATICS

### Specializations

- Operations Research
- Mathematical Physics and Computational Mechanics
- Mathematics and Applications of Signals and Systems

## 3TU MASTER SYSTEMS & CONTROL

[www.utwente.nl/master/am](http://www.utwente.nl/master/am)

[www.utwente.nl/master/sc](http://www.utwente.nl/master/sc)

UNIVERSITY OF TWENTE.

## Masteropleiding aan de Radboud Universiteit

Alle bacheloropleidingen van de Radboud Universiteit hebben een bijbehorende master, waar je zonder extra eisen kunt instromen.

Door binnen je bachelor bepaalde keuzevakken te kiezen, kun je soms een andere master van de Radboud Universiteit volgen.

Met het behalen van je masterdiploma mag je je Master of Science (MSc) noemen.

De masteropleiding Mathematics duurt twee jaar en wordt in het Engels aangeboden. In de master specialiseer je jezelf in een bepaald vakgebied en in een aantal vaardigheden. Je maakt een keuze voor een mastertrack die je goed voorbereidt op de arbeidsmarkt.



### Mastertracks

Aan de start van je master maak je een keuze voor een mastertrack. Binnen de masteropleiding Mathematics kun je kiezen uit zeven mastertracks. Onderstaande tracks sluiten aan bij het wetenschappelijk onderzoek dat plaatsvindt binnen de Radboud Universiteit en die tot de internationale top behoort. Je kiest voor één van deze tracks als je het leuk vindt om fundamenteel of toegepast onderzoek te doen in de wiskunde. Als onderdeel van je master doe je twee onderzoeksstages onder begeleiding van een wetenschappelijk onderzoeker die ook docent is. Tenminste een onderzoeksstage doe je bij een onderzoeksgroep van de Radboud Universiteit, de tweede stage kun je doen bij een universiteit of bedrijf in binnen- of buitenland. Na je master kun je een vierjarig promotieonderzoek doen aan een universiteit, waarin je je verder specialiseert in het doen van wetenschappelijk onderzoek, of je gaat werken bij bijvoorbeeld een onderzoeksinstituut, een overheidsorganisatie of in het bedrijfsleven.

### Mastertrack Algebra and Topology

Er zijn enkele specialismen binnen deze richting die elkaar wederzijds beïnvloeden en inspireren: algebraïsche Meetkunde, algebraïsche topologie, computeralgebra en logica.

### Mastertrack Mathematical Physics

De mastertrack Mathematical Physics sluit aan op een bachelor wiskunde met minor natuurkunde (of omgekeerd), en natuurlijk helemaal op een dubbele bachelor natuurkunde en wiskunde.

### Mastertrack Applied stochastics

Maatschappelijk richt deze specialisatie zich op zowel de medische wereld als het bedrijfsleven, bv via het onderdeel Statistics in Health en de Statistische Helpdesk van de Radboud universiteit.

[www.ru.nl/master](http://www.ru.nl/master)

---

## 9. Goudkoorts

*S. (Sjoerd) Boersma MSc.  
Universiteit Utrecht*

---

We spelen een spel.

- (a) Je hebt maximaal  $n$  ( $n$  een geheel getal groter dan nul) beurten om zo veel mogelijk goud te verdienen. In elke beurt moet je een getal  $p$  kiezen tussen 0 en 1 (je mag ook 0 of 1 zelf kiezen). Je krijgt nu eerst  $p$  kilo goud, maar tevens is er een kans van  $p$  dat hierna direct het spel voorbij is. Als er  $n$  beurten geweest zijn is het spel ook afgelopen. Wat is de verwachtingswaarde van de hoeveelheid goud die je wint bij een optimale strategie<sup>1</sup>?
- (b) Dezelfde vraag, maar nu is het aantal beurten niet beperkt (indien er geen optimale strategie is, vind dan het supremum).
- (c) Wat is het antwoord op de vorige vraag als je niet  $p$  kilo goud, maar  $\sqrt{p}$  kilo goud krijgt als je  $p$  kiest?
- (d) Beschouw nu een situatie waarbij het aantal beurten beperkt is tot  $n$  en je wanneer je  $p$  kiest  $\sqrt{p}$  kilo goud krijgt. Laat  $d(n)$  de verwachtingswaarde zijn bij een optimale strategie als er  $n$  beurten zijn. Dit betekent dat  $d(1) = 1$  en  $d(2) = \frac{5}{4}$ . Vind een recursieve formule die  $d(n)$  uitdrukt als functie van  $d(n-1)$  voor  $n > 1$ .

---

<sup>1</sup>Een optimale strategie is er één waarbij de verwachtingswaarde van de hoeveelheid goud die je krijgt maximaal is.

---

## 10. Schaakborden en dominostenen

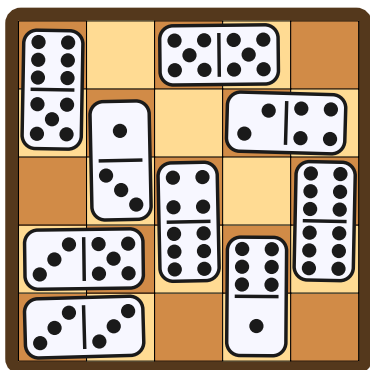
*J. (Josse) van Dobben de Bruyn BSc.  
Universiteit Leiden*

---

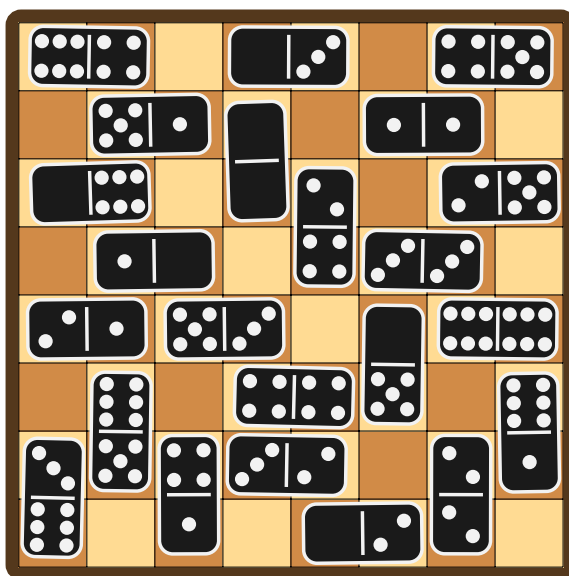
**Notatie.** We schrijven  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Het is een druilerige dag in juni. Je bevindt je in een fel verlichte televisiestudio waar je meedoet aan opnamen van een nieuwe spelshow. Je hebt al allerlei beproevingen doorstaan en inmiddels heb je de finale gehaald. Hier word je geconfronteerd met een  $k \times k$  schaakbord voor zekere  $k \in \mathbb{N}^+$ . Je beschikt bovendien over  $\lfloor \frac{k^2}{2} \rfloor$  dominostenen, die wonderbaarlijk genoeg precies twee keer zo groot zijn als de vakjes van het schaakbord. Met andere woorden: één goed geplaatste dominosteent bedekt precies twee aangrenzende velden van het schaakbord.

De gastheer legt nu de regels van het finalespel uit. Je moet het schaakbord bedekken met dominostenen net zolang tot er geen steen meer bij past. Elke steen moet precies twee velden van het schaakbord bedekken (en mag dus ook niet uitsteken buiten de randen van het bord). De stenen moeten bovendien plat op het bord liggen en dus niet over elkaar heen. Het spel is voorbij zodra er geen steen meer bij past. Merk op dat het onmogelijk is om in een situatie te belanden waarin alle dominostenen op zijn maar het spel nog niet voorbij is. De prijs die je uiteindelijk mee naar huis krijgt, is één euro voor ieder vakje op het schaakbord dat aan het eind van het spel nog leeg is.



Voorbeeld 1:  $f(5) \geq 7$ .



Voorbeeld 2:  $f(8) \geq 18$ .

Zij  $f(k)$  het maximale bedrag dat je mee naar huis kunt krijgen (bij optimaal spel) als het spel wordt gespeeld op een  $k \times k$  schaakbord. Bewijs dat geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k^2} = \frac{1}{3}.$$

(Hint: vind  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  zodat  $\frac{1}{3}k^2 + a_1k + a_2 \leq f(k) \leq \frac{1}{3}k^2 + b_1k + b_2$  geldt voor voldoende grote waarden van  $k$ .)



# Knap staaltje denkwerk!



## Weet jij al wat je na je bachelor gaat doen? Wil jij...

... zelf bepalen hoe je master eruit komt te zien, zonder verplichte vakken?

... alvast vooruitlopen op je toekomstige baan, met combinatiemasters bijvoorbeeld richting bedrijfsleven of onderwijs?

... over de grenzen van Nederland heen kijken, zoals met het ALGANT uitwisselingsprogramma voor algebra, meetkunde en getaltheorie?

... persoonlijk contact met je docenten in een kleinschalige opleiding?

... studeren aan een instituut dat toonaangevend is, zowel in de fundamentele als in de toegepaste wiskunde?

**Dan is een master Wiskunde aan de Universiteit Leiden iets voor jou!**

Kijk voor meer informatie op [www.math.leidenuniv.nl/master](http://www.math.leidenuniv.nl/master).



**Universiteit  
Leiden**

Bij ons leer je de wereld kennen



## Department of Data Science and Knowledge Engineering



# Master Operations Research

Operations Research is the science of making informed decisions. It has widespread applications in business and engineering. In today's world many companies and organisations collect all sorts of data in large amounts. They aim to extract useful information from it, to recognize patterns and anomalies.

Maastricht University's Master in Operations Research provides the mathematical tools to model and handle these big data. It also uses computational software that is the key to data science. We teach the use of applied mathematics to analyse and optimize processes, problems and operations.

Visit our next Master's Open Day on Saturday 8 October 2016

For more info: [www.maastrichtuniversity.nl/dke](http://www.maastrichtuniversity.nl/dke)

---

## 11. Fibonacci matrices

Prof. dr. F.M. (Michel) Dekking  
Technische Universiteit Delft

---

Een  $r \times r$  matrix  $M$  heet een *Fibonacci matrix* als

1.  $M = (m_{i,j})$  niet-negatief is (d.w.z. voor alle  $i, j = 1, \dots, r$  is  $m_{ij} \geq 0$ ),
2. de  $m_{ij}$  gehele getallen zijn,
3. de grootste eigenwaarde van  $M$  de gulden snede  $\Phi := (1 + \sqrt{5})/2$  is (oplossing van  $x^2 = x + 1$ ),
4.  $M$  *primitief* is, d.w.z. er bestaat een positief geheel getal  $n$  zó, dat de matrix  $M^n = (m_{ij}^n)$  strikt positief is—alle  $m_{ij}^n > 0$ .

We noteren  $\mathcal{F}_r$  voor de verzameling van alle  $r \times r$  Fibonacci matrices.

MINICURSUS Niet-negatieve primitieve matrices.

- 1) Als de niet-negatieve  $r \times r$  matrix  $M$  primitief is, dan is er een reële positieve eigenwaarde  $\lambda_{\text{PF}}$  zó, dat  $\lambda_{\text{PF}} > |\lambda|$  voor alle andere eigenwaarden  $\lambda$  van  $M$ , en de bijbehorende eigenvector (links of rechts) is strikt positief. De eigenwaarde  $\lambda_{\text{PF}}$  heet de Perron-Frobenius eigenwaarde. De eigenvectoren van de andere eigenwaarden zijn *niet* strikt positief.
- 2) De eigenwaarde  $\lambda_{\text{PF}}$  ligt tussen de kleinste rijsum en de grootste rijsum van  $M$  in.

(a) Wat is  $\mathcal{F}_2$ ?

(b) Wat is  $\mathcal{F}_3$ ?

(c) (Naar aanleiding van 2) in de minicursus) Kun je laten zien dat er matrices in  $\mathcal{F}_r$  zijn met minstens één grote rijsum, bijvoorbeeld rijsum  $r - 1$ ?

---

## 12. Complexe afbeeldingen van matrices

*Dr. F.J. (Fokko) van de Bult  
Technische Universiteit Delft*

---

Voor een gegeven vaste  $n$  bekijken we continue functies van  $n \times n$  matrices met coëfficiënten in  $\mathbb{C}$  naar  $\mathbb{C}$ :

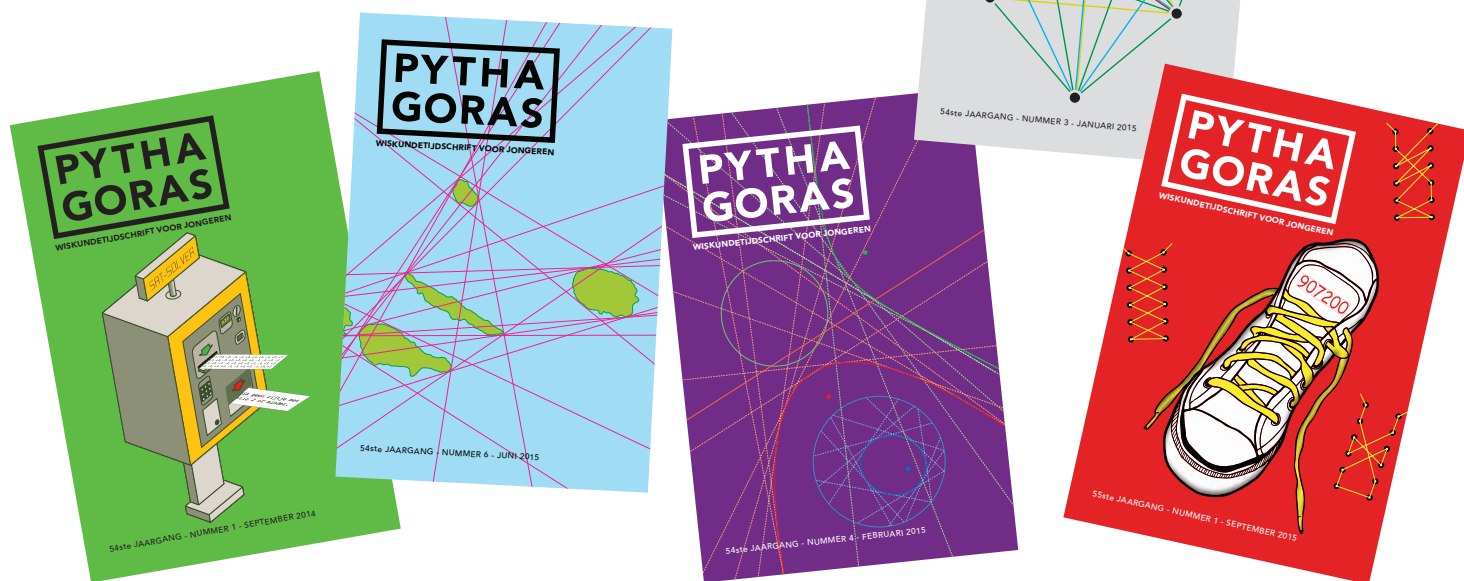
$$f_n : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

die voldoen aan de vergelijking

$$f_n(AB) = f_n(A)f_n(B).$$

- (a) Bepaal alle oplossingen van deze vergelijking voor  $n = 1$ , dus voor functies  $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .
- (b) Bepaal nu alle oplossingen voor willekeurige  $n$ .

# PYTHA GORAS



**Wil jij ook op een speelse manier met wiskunde bezig zijn?  
Dan kan dat met het wiskundehobbyblad *Pythagoras*.**

*Pythagoras* bestaat al 55 jaar. Een kleine greep uit de 55ste jaargang:

- getallen als som van twee, drie of vier kwadraten;
- bouwplaten om platonische lichamen binnenstebuiten te vouwen zonder ze te scheuren;
- een wedstrijd voor lezers om zelf een getallenrij te maken die zo origineel is dat hij in de Online Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) van Neil Sloane geplaatst wordt;
- puzzels in de Pythagoras Olympiade.

## **Nieuwsgierig?**

Neem een abonnement voor 35 euro per jaar. Met een groep van ten minste vijf personen kun je een groepsabonnement nemen voor maar 20 euro per persoon per jaar. Bij een groepsabonnement worden alle Pythagorassen naar hetzelfde adres gestuurd.

[www.pyth.eu](http://www.pyth.eu)

*Pythagoras is ook op Facebook!*







