LIMO 2016

# Uitwerkingen

Hoofdsponsor:

Transtrend

natuurwetenschappelijke
studievereniging amsterdam

**Dit uitwerkingenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2016:**
Gideon Jager, Nick Nauta, Robin Gravemaker, Jeroen Dekker, Hugo Sauerbier Couvée, Jeremy van der Heijden, Ismani Nieuweboer.
*e-mail:* `limo2016@nsaweb.nl`
*website:* `nsaweb.nl/limo2016`

Omslagontwerp: Casper Sauerbier Couvée
Opgaven: Gerhard Woeginger, Christophe Debry, Arne Smeets, Hendrik Lenstra, Harold de Boer, Frans Oort, Raf Bocklandt, Han Peters, Sjoerd Boersma, Josse van Dobben de Bruyn, Michiel Dekking, Fokko van de Bult.

## Inhoudsopgave

## 1. Vind ze allemaal!

*Prof. dr. ir. G.J. (Gerhard) Woeginger*
*Technische Universiteit Eindhoven*

Geef alle continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$\int_0^\pi f(x)\,\sin^2 x\,dx = \sqrt{\pi/2} \qquad \text{and} \qquad \int_0^\pi f^2(x)\,\sin^2 x\,dx = 1.$$

**Uitwerking.**
Herinner (of bereken) dat $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi/2$. Vermenigvuldig deze vergelijking met $2/\pi$, vermenigvuldig de eerste vergelijking uit de opgave met $-2\sqrt{2/\pi}$, en tel beide resulterende vergelijkingen op bij de tweede vergelijking uit de opgave. Dit geeft

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi (2/\pi)\sin^2 x - 2\sqrt{2/\pi}\,f(x)\,\sin^2 x + f^2(x)\,\sin^2 x\,dx \\ &= \int_0^\pi \Big(f(x) - \sqrt{2/\pi}\Big)^2 \sin^2 x\,dx. \end{aligned}$$

Omdat de integrand niet-negatief en continu is, moet deze identiek 0 zijn. Dit laat zien dat de constante functie $f(x) \equiv \sqrt{2/\pi}$ de unieke oplossing voor de opgave is.

Technische Universiteit
**Eindhoven**
University of Technology

# Op weg naar een mooie toekomst!!

## Plan your future

**See www.tue.nl/graduateprograms/iam**

# Industrial and Applied Mathematics

**2. Infima van maxima**

*C.P. (Christophe) Debry MSc.*
*KU Leuven, Universiteit van Amsterdam*

(a) Bepaal het grootste reëel getal $X$ zodat voor alle positieve reële getallen $a$ en $b$ geldt dat

$$\max(a^3 - 6b, b^3 - 6a) \geq X.$$

(b) Bepaal het grootste reëel getal $Y$ zodat voor alle positieve reële getallen $a$ en $b$ geldt dat

$$\max(a^3 - 6b + 13, b^3 - 6a) \geq Y.$$

**Uitwerking.**
Voor alle positieve reële getallen $x$ en $t$ geldt $(x-t)^2(x+2t) \geq 0$, i.e. $x^3 + 2t^3 \geq 3xt^2$.

(a) Aangezien $x^3 + 2\sqrt{8} \geq 6x$ voor alle $x > 0$ geldt, voldoen alle positieve reële getallen $a$ en $b$ aan de ongelijkheid

$$2\max(a^3 - 6b, b^3 - 6a) \geq (a^3 - 6a) + (b^3 - 6b) \geq -4\sqrt{8} = -8\sqrt{2}.$$

Omdat hier gelijkheid optreedt voor $a = b = \sqrt{2}$, is het antwoord op (a) dat $X = -8\sqrt{2}$.

(b) Aangezien de ongelijkheden $a^3 + 2 \geq 3a$ en $b^3 + 16 \geq 12b$ voor alle positieve reële getallen $a$ en $b$ gelden, vinden we dat

$$\begin{aligned} 3\max(a^3 - 6b + 13, b^3 - 6a) &\geq 2(a^3 - 6b + 13) + (b^3 - 6a) \\ &= 2(a^3 - 3a) + (b^3 - 12b) + 26 \\ &\geq -4 - 16 + 26 = 6. \end{aligned}$$

Omdat hier gelijkheid optreedt voor $a = 1$ en $b = 2$, is het antwoord op vraag (b) dat $Y = 2$.

## 3. Grafen kleuren

*Dr. A. (Arne) Smeets*
*KU Leuven*

Zij $n \geq 2$ een natuurlijk getal. Zij $N$ het grootste natuurlijk getal met de volgende eigenschap: de volledige graaf op $N$ hoekpunten kan gekleurd worden zodanig dat

- minstens 2 en hoogstens $n$ kleuren gebruikt worden, en
- er geen enkele dichromatische driehoek voorkomt in de graaf, m.a.w. geen enkele driehoek gekleurd wordt met precies twee verschillende kleuren.

Zij $\mathcal{V}$ de verzameling hoekpunten en $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ de verzameling kleuren. Zij $\varphi : \mathcal{V} \times \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ de functie die aan een hoekpunt $v \in \mathcal{V}$ en een kleur $c_i \in \mathcal{C}$ het aantal zijden van de graaf toekent met $v$ als eindpunt en kleur $c_i$.

Bewijs:

(a) $\varphi(v, c_i) \leq n - 2$ voor alle $i$;

(b) $N \leq (n-1)^2$;

(c) bovenstaande ongelijkheid wordt een gelijkheid indien $n - 1$ priem is.

**Uitwerking.**
(a) Stel dat $\varphi(v, c_i) \geq n - 1$ voor een zekere $v \in \mathcal{V}$ en $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Noem de bijhorende kleur $c_i$ “blauw”. Zijn $w_1, w_2, \cdots, w_{n-1} \in \mathcal{V}$ hoekpunten zodanig dat de zijden $vw_1, vw_2, \cdots, vw_{n-1}$ allemaal blauw zijn. Dan zijn ook alle zijden $w_j w_k$ (met $1 \leq j < k \leq n-1$) blauw, anders zouden we een dichromatische driehoek hebben. Kies nu $u \in \mathcal{V}$ zodat niet alle zijden $uv, uw_1, uw_2, \cdots, uw_{n-1}$ blauw zijn; dit is zeker mogelijk omdat de graaf niet monochromatisch is. Stel zonder verlies van de algemeenheid dat $uv$ niet blauw is maar “rood”. Dan geldt voor $j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ dat $vw_j$ noch rood, noch blauw is, anders zou $uvw_j$ dichromatisch zijn. Bijgevolg zijn er slechts $n - 2$ kleuren mogelijk voor de zijden $vw_1, vw_2, \cdots, vw_{n-1}$. Bijgevolg moeten twee van deze $n - 1$ zijden, noem deze $vw_s$ en $vw_t$ (met $s, t \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$) dezelfde kleur hebben. Dus driehoek $vw_s w_t$ is dichromatisch; dat is een tegenspraak.

(b) Merk op dat $\varphi(v, c_1) + \varphi(v, c_2) + \cdots + \varphi(v, c_n) = N - 1$ voor alle $v \in \mathcal{V}$. We concluderen

$$N = 1 + \varphi(v, c_1) + \varphi(v, c_2) + \cdots + \varphi(v, c_n) \leq 1 + n(n-2) = (n-1)^2.$$

(c) Stel dat $n - 1 = p$ priem is. Identificeer de hoekpunten van de complete graaf op $p^2$ hoekpunten met de geordende paren $(a, b)$ met $1 \leq a, b \leq p$. Kleur de zijde die de hoekpunten $(a, b)$ en $(a', b')$ verbindt blauw als $b = b'$. Noem de overige kleuren $c_1, c_2, \cdots, c_p$. Indien $b \neq b'$, neem dan $\ell \in \{1, 2, \cdots, p\}$ zodat

$$\ell \equiv (a - a')(b - b')^{-1} \pmod{p}$$

en kleur de zijde die $(a, b)$ en $(a', b')$ verbindt met kleur $c_\ell$. Het is niet moeilijk om na te gaan dat die een kleuring oplevert die aan alle voorwaarden voldoet.
**Opmerking:** de gelijkheid in (c) geldt ook wanneer $n - 1$ een macht van een priemgetal is.

# Katholieke Universiteit Leuven

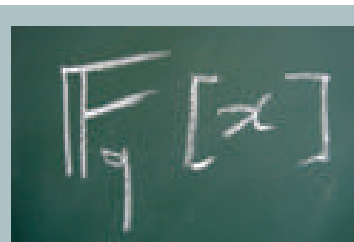
De KU Leuven, gesticht in 1425, is de oudste universiteit van de lage landen. Meer dan 7.932 onderzoekers zijn er actief in wetenschappelijk onderzoek en onderwijs. Op 1 maart 2016 telde de K.U.Leuven in totaal 56.555 ingeschreven studenten. Van de ingeschreven studenten heeft ongeveer 82% de Belgische nationaliteit, 18% heeft een andere EU-nationaliteit of komt van buiten de EU. Dit maakt van de gezellige provincie-hoofdstad Leuven een bruisende studentenstad met een rijk sociocultureel aanbod.

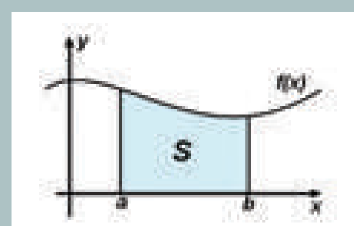
# Onderzoek aan het Departement Wiskunde

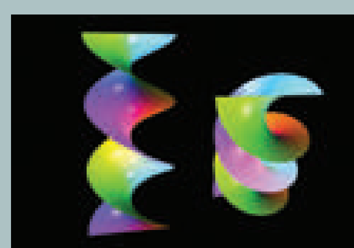
Het onderzoek aan het departement Wiskunde is georganiseerd op het niveau van de onderzoeksafdelingen:

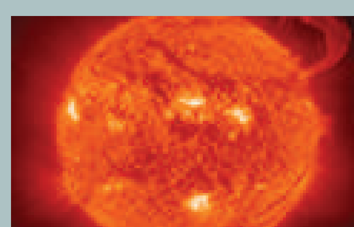
- Afdeling Algebra: het onderzoek situeert zich in de algebraïsche meetkunde, getaltheorie, algebraïsche topologie en groepentheorie.
- Afdeling Analyse: in deze afdeling doet men onderzoek in de klassieke analyse (reële en complexe analyse) en in de functionaalanalyse.
- Afdeling Meetkunde: het onderzoek is gecentreerd rond differentiaalmeetkunde, in het bijzonder Riemannse en pseudo-Riemannse meetkunde en deelvariëteiten.
- Afdeling Plasma-astrofysica: het onderzoeksdomein van deze afdeling is de wiskunde van vloeistoffen en plasma's, het voornaamste studieobject is de zon. Dit onderzoek is gesitueerd in de toegepaste en computationele wiskunde.
- Afdeling Statistiek: deze afdeling is actief in de wiskundige statistiek, in het bijzonder de theorie van extreme waarden, robuuste statistiek en niet-parametrische methoden. Ook stochastische processen en financiële wiskunde komen aan bod. De afdeling is bovendien ook actief in toegepaste consultatie voor bedrijven.

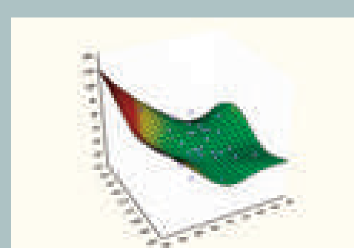
Meer info op http://wis.kuleuven.be









*Differentiaalmeetkunde II*
*Wiskundige logica II*
*Polaire ruimten*
*Galoismeetkunde*
*Lineaire algebraïsche groepen*
*Banachruimten en Banachalgebra's*
*Cliffordanalyse*
*Codeertheorie*
*Bewijstheorie*
*Representatietheorie en toepassingen*
*Eindige meetkunde*
*Infinitesimale analyse*
*Algebraïsche topologie en homologe algebra*
*Capita selecta in de logica*
*Transformatieanalyse*
*Incidentiemeetkunde*
*Capita selecta in de algebra*
*Capita selecta in de analyse*
*Capita selecta in de meetkunde*
*Partiële differentiaalvergelijkingen*
*Fysica van galaxieën*
*Relativiteitstheorie*
*Kwantumveldentheorie*
*Statistische fysica*
*Extragalactische sterrenkunde*
*Wisk. aspecten van algemene relativiteitstheorie*
*Kosmologie en galaxievorming*
*Kwantumelektrodynamica*
*Mechanica van continue media*
*Inleiding tot de dynamica van atmosferen*
*Kwantumcomputing*
*Nunerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen*
*Wisk. modellering van artificiële intelligentie*
*Computeralgebra*
*Financiële wiskunde: discrete stochastische modellen*
*Algoritmische grafentheorie*
*Berekenbaarheid en complexiteit*
*Statistische besluitvorming*
*Stochastische processen*
*Capita selecta in de numerieke wiskunde*
*Financiële wiskunde: continue stochastisch. modellen*
*Capita selecta in soft computing*
*Benaderingsmethoden voor randwaardeproblemen*
*Causale analyse en ontbrekende gegevens*
*Overlevingsanalyse*
*Toegepaste functionaalanalyse*
*Kwalitatieve oplossingstechnieken in wetenschappelijke modellering*
*Geschiedenis van de wiskunde*

# Wiskunde aan UGent

Aan de samenvloeiing van Leie en Schelde ligt de historische stad Gent, de provinciehoofdstad van Oost-Vlaanderen en met 67 000 studenten de grootste Vlaamse studentenstad. De Universiteit Gent is vandaag één van de belangrijkste universiteiten in het Nederlandse taalgebied.

De Gentse universiteit heeft een rijke wiskundige traditie en visitatiecommissies beoordeelden haar bachelor- en masteropleiding wiskunde als uitstekend. De studentenvereniging PRIME zorgt voor een stimulerende dynamiek onder wiskundestudenten.

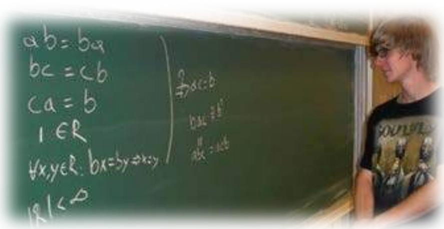
Het masterprogramma wiskunde biedt een grote individuele keuzevrijheid. Elke student kiest in het eerste masterjaar een major en minor. Daarnaast kiest de student in het tweede masterjaar een onderwerp voor een masterproef.

| Major (30 ECTS) | Minor (30 ECTS) |
|---|---|
| Zuivere wiskunde<br>of Wiskundige natuurkunde<br>of Toegepaste wiskunde | Onderwijs<br>of Onderzoek<br>of Economie & verzekeringen |
| **Masterproef (30 ECTS)** | **Keuzevakken (30 ECTS)** |
| Tweede masterjaar | ≥18 ECTS wiskundevakken |

De keuze van de major geeft aan waar de interesses liggen binnen de wiskunde. De keuze van een minor bereidt voor op de arbeidsmarkt. Door de minor onderwijs kan de hele theoretische component van de lerarenopleiding in het masterprogramma worden opgenomen. In de minor onderzoek, die staat voor verdiepende specialisatie, kan de student kiezen voor seminarie, literatuurstudie of een (bedrijfs-)stage. De minor economie en verzekeringen bevat o.a. vakken die een voorbereiding kunnen vormen op een master actuariële wetenschappen.

Meer weten?

- www.UGent.be
- www.wiskunde.UGent.be
- PRIME.UGent.be



## 4. De A van Abels

*Prof. dr. H.W. (Hendrik) Lenstra*
*Universiteit Leiden*

Laat $A$ een groep zijn. We schrijven $E$ voor de verzameling groepshomomorfismen van $A$ naar zichzelf. Stel dat er een element $b \in A$ bestaat waarvoor de afbeelding $E \to A$ die $f$ op $f(b)$ afbeeldt bijectief is.

(a) Is $A$ noodzakelijk abels? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(b) Is $A$ noodzakelijk cyclisch? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

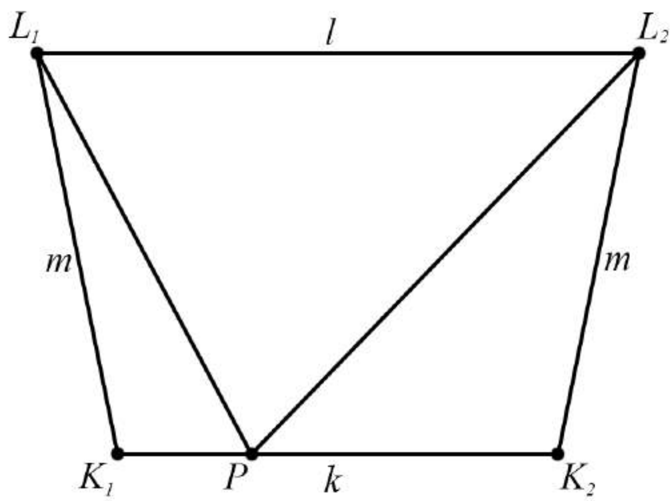
**Uitwerking.**
(a) Ja, $A$ moet abels zijn. Definieer, om dit te bewijzen, voor elke $a \in A$ de afbeelding $\varphi_a \colon A \to A$ door $\varphi_a(x) = axa^{-1}$; dit is een groepshomomorfisme, dus $\varphi_a \in E$. Met $b \in A$ als in de opgave, geldt $\varphi_b(b) = bbb^{-1} = b = \mathrm{id}_A(b)$, waar $\mathrm{id}_A \in E$ de identieke afbeelding is; dus $\varphi_b$ en $\mathrm{id}_A$ hebben hetzelfde beeld onder de gegeven afbeelding $E \to A$. Die afbeelding is bijectief, dus $\varphi_b = \mathrm{id}_A$, hetgeen wil zeggen dat voor alle $x \in A$ geldt $bx = xb$. Neem nu $x \in A$. Dan geldt $\varphi_x(b) = xbx^{-1} = b = \mathrm{id}_A(b)$, dus met hetzelfde argument als zonet volgt $\varphi_x = \mathrm{id}_A$. Dit betekent dat voor alle $y \in A$ geldt $xy = yx$, en omdat $x$ willekeurig was, wil dit zeggen dat $A$ abels is.

(b) Nee, $A$ hoeft niet cyclisch te zijn. Een voorbeeld is de additieve groep $\mathbb{Q}$ der rationale getallen. Het is niet moeilijk te bewijzen dat elk groepshomomorfisme $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ van de vorm $x \mapsto rx$ is voor een $r \in \mathbb{Q}$, dus de afbeelding $E \to \mathbb{Q}$, $f \mapsto f(1)$ is bijectief. Maar het is ook gemakkelijk te zien dat $\mathbb{Q}$ niet cyclisch is.

## 5. Drie-eenvormige trapezia

*Ir. H.M. (Harold) de Boer*
*Transtrend BV*

We noemen een gelijkbenig trapezium met benedenbasis $K_1K_2$ en (parallelle) bovenbasis $L_1L_2$ *drie-eenvormig*, wanneer we op $K_1K_2$ een punt $P$ kunnen vinden zodanig dat de lijnen $L_1P$ en $L_2P$ het trapezium opdelen in 3 gelijkvormige driehoeken. De lengte van de bovenbasis $L_1L_2$ noemen we $l$; de lengte van de benedenbasis $K_1K_2$ noemen we $k$; en voor de twee diagonalen geldt: $|L_1K_1| = |L_2K_2| = m$.
Geef, uitgedrukt in $k$, $l$ en $m$, de (voldoende en noodzakelijke) voorwaarden waaronder een gelijkbenig trapezium *drie-eenvormig* is.




Merk op: in de schets is $l > k$, maar dat hoeft niet zo te zijn. Het midden van de bovenbasis moet wel recht boven het midden van de benedenbasis liggen. Verder zijn de 3 driehoeken in deze schets overduidelijk niet gelijkvormig.

**Uitwerking.**
De voorwaarden voor een *drie-eenvormig* gelijkbenig trapezium zijn:

$$k \geq 2m \quad \vee \quad k = 2l.$$

**Bewijs.** We gaan steeds op zoek naar 3 gelijkvormige driehoeken, met hoeken $A$, $B$ en $C$. Er geldt: $A + B + C = 180$. De lengtes van de zijden van de bovenste driehoek met basis $L_1L_2$ noemen we $a$, $b$ en $c$; met $a$ de overstaande zijde van hoek $A$, etc. De linker driehoek heeft zijdes $xa$, $xb$ en $xc$ met $x > 0$; de rechter driehoek zijdes $ya$, $yb$, $yc$ met $y > 0$.
We bekijken eerst het geval $k \leq l$. Te beginnen met de hoeken. De linker en rechter driehoek hebben een even grote, niet-scherpe hoek in $K_1$ respectievelijk $K_2$. We noemen deze $C$. De bovenste driehoek kan alleen een niet-scherpe hoek hebben in $P$, dus die hoek moet dan ook $C$ zijn. Noemen we de hoek in $P$ van de rechter driehoek $A$, dan worden alle andere hoeken nu eenduidig gedefinieerd: wegens $A+B+C = 180$ moet de hoek in $P$ van de linker driehoek $B$ zijn. De tophoeken van de linker en rechter driehoek zijn $A$ respectievelijk $B$. De beide resterende hoeken van de bovenste driehoek volgen uit de Z-hoeken $K_1PL_1L_2$ en $K_2PL_2L_1$ (zie afbeelding). Merk op, $A$ en $B$ zouden even groot kunnen zijn, maar dat verandert de situatie niet.

Nu kijken we naar de lengtes van de zijdes. Uit $xc = a$ volgt $x = \frac{a}{c}$. En uit $yc = b$ volgt $y = \frac{b}{c}$. Invullen geeft keurig voor de beide diagonalen $m = xb = ya = \frac{ab}{c}$. En voor de benedenbasis:

$$k = xa + yb = \tfrac{a^2+b^2}{c}.$$

Met bovenbasis $l = c$ hebben we de zijden van het trapezium zo uitgedrukt in $a$, $b$ en $c$. De vraag is: voor welke combinaties van $k$, $l$ en $m$ bestaan er dergelijke $a$, $b$ en $c$? Daartoe gaan we $a$, $b$ en $c$ uitdrukken $k$, $l$ en $m$.
We zien: $c = l$, $ab = ml$ en $a^2 + b^2 = kl$. De combinatie van de twee laatsten geeft:

$$(a + b)^2 = kl + 2ml \quad \Leftrightarrow \quad (a + b) = \sqrt{kl + 2ml} \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt{kl + 2ml} - a.$$

Als we deze $b$ invullen in $ab = ml$ krijgen we een kwadratische vergelijking: $a^2 - a\sqrt{kl + 2ml} + ml = 0$. Deze laat zich oplossen tot:

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{l} \cdot (\sqrt{k + 2m} \pm \sqrt{k - 2m}).$$

Door dit verder in te vullen krijgen we:

$$b = \tfrac{1}{2}\sqrt{l} \cdot (\sqrt{k + 2m} \mp \sqrt{k - 2m}),$$

$$c = l.$$

Dit geeft een oplossing voor alle $k$, $l$ en $m$ waarvoor geldt: $k \geq 2m$.
[Een speciaal geval is $k = 2m$. Dan volgt $a = b$ en is $ABC$ dus een gelijkbenige driehoek met tophoek in $C$. Een ander speciaal geval is $k = l$, dus het trapezium als een rechthoek. Dan volgt: $a^2 + b^2 = kl = l^2 = c^2$, en is $ABC$ dus een rechthoekige driehoek met een rechte hoek in $C$.]

Blijft over het geval $k > l$. We beginnen weer met de hoeken. De even grote, nu scherpe, hoeken in $K_1$ en $K_2$ noemen we weer $C$. Met $C$ ook weer in $P$ van de bovenste driehoek, laten alle hoeken zich weer eenduidig net als hierboven invullen. Daarbij kunnen we alle andere stappen ook herhalen, waarna we uitkomen op dezelfde voldoende en noodzakelijke voorwaarde: $k \geq 2m$.
Maar omdat $C$ nu scherp is, zou $C$ nu eventueel ook niet onderin de bovenste driehoek kunnen zitten. We gaan op zoek naar alle mogelijke oplossingen waarbij de onderste hoek van de bovenste driehoek niet $C$ is. We noemen deze meteen maar $A$. Stel de hoek rechts boven in de bovenste driehoek is $C$, dan volgt uit de Z-hoek $K_2PL_2L_1$, dat de rechter driehoek een gelijkbenige driehoek met tophoek $A$ is in $L_2$. Waaruit volgt dat beide hoeken bovenin de bovenste driehoek dus $C$ moeten zijn. Wegens $A \neq C$ moet de tophoek $A$ van de linker driehoek dan ook bovenin zitten. Welke zijde lengtes passen bij deze formatie van 3 gelijkbenige driehoeken? Het zal meteen duidelijk zijn dat geldt: $x = y = 1$ en dat deze formatie mogelijk is dan en slechts dan wanneer $k = 2l$.
In het geval $(k \geq 2m) \wedge (k = 2l)$ hebben we bij $m \neq l$ te maken met gelijkbenige trapezia die op 2 verschillende manieren zijn op te delen in 3 gelijkvormige (gelijkbenige) driehoeken. Die zijn dus *dubbeldrie-eenvormig*.

university of groningen

# Master of Science in Mathematics / Applied Mathematics

## Mathematics

How does a bank check whether your digital signature is a valid one? Do the planets move in stable orbits or will they eventually collide? How can you write an algorithm that automatically detects whether an email message is spam? The mathematics behind these questions is dealt within the Master's degree programme in Mathematics.

The programme offers two specialisations:
› Mathematics and Complex Dynamical Systems
› Statistics and Big Data

In addition there is a possibility to follow a programme Science, Business and Policy

## Applied Mathematics

Why does one car have more air resistance than another? How can a satellite be kept in a stable orbit around the earth? Applied mathematicians provide the necessary theoretical background when trying to answer such questions, in close interaction with specialists from the field of application.

The programme offers two specialisations:
› Systems and Control
› Computational Mathematics

www.rug.nl

## 6. Oplossingen in paren

*Prof. dr. F.J. (Frans) Oort*
*Universiteit Utrecht*

Voor elk priemgetal $p$ schrijven we

$$n(p) = \#(\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{F}_p, \quad y^2 = x^3 - 2016{\cdot}x\}).$$

Bereken $n(p)$ voor elk priemgetal $p$ met $p \equiv 3 \pmod 4$. Geef een bewijs dat het antwoord juist is.

Notatie: $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$.

**Uitwerking.**
Voor elk priemgetal $p$ met $p \equiv 3 \pmod 4$ geldt:

$$\#(\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{F}_p, \quad y^2 = x^3 - 2016{\cdot}x\}) =: n(p) = p.$$

**Bewijs.** Schrijf

$$n^-(p) := \#(\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{F}_p, \quad -y^2 = x^3 - 2016{\cdot}x\}).$$

We laten zien dat voor elk priemgetal $p$ met $p \equiv 3 \pmod 4$ geldt dat

$$n(p) + n^-(p) = 2p \quad \text{ en } \quad n(p) = n^-(p); \quad \text{conclusie:} \;\; n(p) = p.$$

Bewijs van $n(p) + n^-(p) = 2p$:
Voor elke $x \in \mathbb{F}_p$ met $x^3 = 2016{\cdot}x$ is er precies één oplossing $(x,0)$ zowel voor $Y^2 = X^3 - 2016{\cdot}X$ als voor $-Y^2 = X^3 - 2016{\cdot}X$. Voor elke $x \in \mathbb{F}_p$ met $x^3 \neq 2016{\cdot}x$ zijn er
- óf twee waarden van $y$ met $y^2 = x^3 - 2016{\cdot}x$ en geen waarden van $y$ met $-y^2 = x^3 - 2016{\cdot}x$,
- óf geen waarden van $y$ met $y^2 = x^3 - 2016{\cdot}x$ en twee waarden van $y$ met $-y^2 = x^3 - 2016{\cdot}x$.

We gebruiken hier dat $-1$ niet een kwadraat is in $\mathbb{F}_p$, en als $z \in \mathbb{F}_p^*$ wel/niet en kwadraat is, dan is $-z \in \mathbb{F}_p^*$ niet/wel een kwadraat (alleen als $p \equiv 3 \pmod 4$).
Conclusie: $n(p) + n^-(p) = 2p$.

De substitutie $X \mapsto -X$ voert $Y^2 = X^3 - 2016{\cdot}X$ over in $-Y^2 = X^3 - 2016{\cdot}X$; dit bewijst $n(p) = n^-(p)$.

We hebben nu bewezen dat $n(p) = p$.

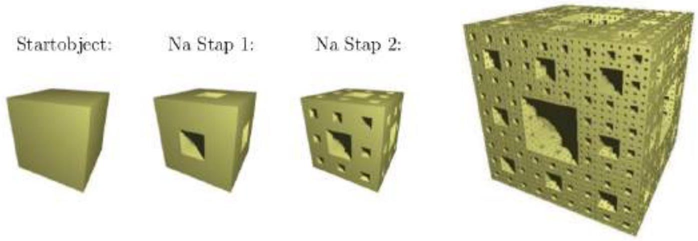
**Opmerking.** Voor $p$ een deler van 2016 geeft de vergelijking $Y^2 = X^3 - 2016{\cdot}X$ een singuliere kromme over $\mathbb{F}_p$; omdat $2016 = 32 \times 9 \times 7$ kunnen we bovenstaande bewering apart bewijzen voor $p = 3$ en voor $p = 7$; we hebben echter hierboven gezien dat ook in die gevallen het algemenere bewijs opgaat.

**Opmerking.** Voor $p \equiv 3 \pmod 4$ met $p > 7$ volgt de uitspraak uit de Riemann Hypothese voor elliptische krommen in karakteristiek $p$.

## 7. Een sneetje spons

*Dr. R.R.J. (Raf) Bocklandt*
*Universiteit van Amsterdam*

De mengerspons is een object in de ruimte dat men recursief kan construeren: $M_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$ is een eenheidskubus met als middelpunt de oorsprong. $M_{n+1}$ bestaat uit 20 kopieën van $M_n$ die herschaald zijn met een factor 1/3 en geplaatst worden in de originele kubus zodat elk van de kopieën een ribbe gemeenschappelijk heeft met de originele kubus (we zetten dus geen kopieën in de middens van de zijvlakken en geen kopie in het middelpunt van de originele kubus).




De mengerspons is de doorsnede van alle $M_n$: $M = \cap_i M_i$ en is een voorbeeld van een fractal.

De dimensie van een fractal wordt gedefiniëerd als de limiet van een rij:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\text{aantal kubusjes met zijde } 1/n \text{ nodig om } M \text{ te overdekken})}{\log n}.$$

Voor een volledig gevulde kubus is deze limiet 3, wat overeenkomt met onze intuitieve notie van dimensie. Als we kijken naar de mengerspons en ons beperken tot de deelrij met $n = 3^k$, dan is het duidelijk dat deze fractal de volgende dimensie heeft:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log 20^k}{\log 3^k} = \ln 20/\ln 3 \approx 2.727.$$

Op analoge wijze kan je eenvoudig nagaan dat het zijvlak van een mengerspons een dimensie $\ln 8/\ln 3 \approx 1.893$ heeft.

Beschouw nu het vlak door het middelpunt van de kubus met normaal $(1, 1, 1)$:

$$\Pi : x + y + z = 0.$$

Dit vlak doorsnijdt de kubus in een regelmatige zeshoek en de mengerspons in een zeshoekvormige fractal. De opdracht is om de dimensie te bepalen van deze fractal.

(a) Schets $M_1 \cap \Pi$, $M_2 \cap \Pi$. (en eventueel $M_3 \cap \Pi$)

(b) Stel $n_k$ het aantal kubusjes met zijde $3^{-k}$ in $M_k$ die het vlak $\Pi$ doorsnijden. Geef een recursief voorschrift voor $n_k$ als functie van $n_{k-1}$ en $n_{k-2}$. Houd er rekening mee dat zo'n kubusje dit vlak op verschillende manieren kan doorsnijden.

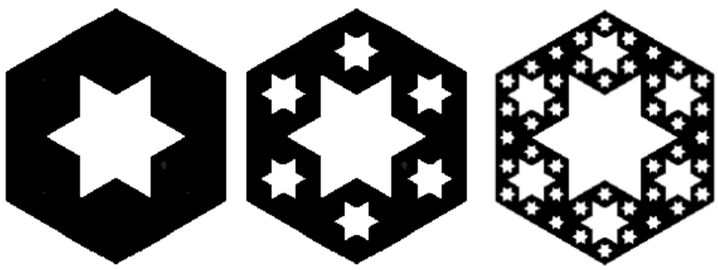
(c) Vorm dit recursief voorschrift om tot een expliciet voorschrift en gebruik dit om de dimensie van $M \cap \Pi$ te bepalen:

$$\dim M \cap \Pi = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln 3^k}.$$

(d) Stel $\Xi : ax + by + cz = 0$ een willekeurig vlak door het middelpunt van de kubus en kijk naar de dimensie van $\Xi \cap M$. Voor $\Xi = \Pi$ is deze dimensie maximaal (maar dat moet je niet aantonen). Kan je een $\Xi$ vinden waarvoor de dimensie zo klein mogelijk wordt?

(e) Toon aan dat de dimensie van $\Xi \cap M$ uit (4) inderdaad een ondergrens is.

**Uitwerking.**

(a) 

(b) Als $m$ het midden is van het kubusje en $r$ de lengte van de zijde dan wordt een kubusje door $\Pi$ gesneden als

$$m \cdot (1, 1, 1) \in [-\frac{3r}{2}, \frac{3r}{2}]$$

De locaties van $m$ hebben coordinaten $(a, b, c)$ met $a, b, c \in r\mathbb{Z}$ dus een kubusje doorsnijdt $\Pi$ in 3 mogelijke gevallen

$$a + b + c = \{-r, 0, r\}$$

In het middenste geval doorsnijdt het vlak de kubus middendoor in een zeshoek. In de andere gevallen snijdt $\Pi$ er een hoek af en krijg je een driehoek als zijvlak.

Als je een kubusje met $m \cdot (1, 1, 1) = 0$ vervangt door een kopie van $M_1$ dan krijgen we

- 6 kleinere kubusjes met $m' \cdot (1, 1, 1) = 0$ (deze worden door het vlak doorsneden in een zeshoek)
- 3+3 kleinere kubusjes met $m' \cdot (1, 1, 1) = \pm r/3$ (deze worden door het vlak doorsneden in een driehoek)
- 8 kubusjes die het vlak niet doorsnijden.

Als je een kubusje met $m \cdot (1, 1, 1) = \pm r$ vervangt door een kopie van $M_1$ dan krijgen we

- 1 kleiner kubusje dat wordt door het vlak doorsneden in een zeshoek
- 3 kleinere kubusjes die worden door het vlak doorsneden in een driehoek
- 16 kubusjes die het vlak niet doorsnijden.

Stel $z_i$ ($d_i$) het aantal kubusjes die worden door het vlak doorsneden in een zeshoek (driehoek) Dit geeft de volgende recursie.

$$\begin{cases} z_{i+1} = 6z_i + d_i \\ d_{i+1} = 6z_i + 3d_i \end{cases}$$

met $z_0 = 1$, $d_0 = 0$. Nu $n_i = z_i + d_i = 12z_{i-1} + 4d_{i-1} = 96z_{i-2} + 24d_{i-2}$ en $n_{i-1} = 12z_{i-2} + 4d_{i-2}$, $n_{i-2} = z_{i-2} + d_{i-2}$ dus

$$n_i = 9n_{i-1} - 12n_{i-2}$$

met $n_0 = 1$, $n_1 = 12$.

(c) We stellen $n_i = q^i$, dan voldoet $q$ aan

$$q^2 - 9q + 12 = 0$$

dus $q_\pm = \frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{81-48}) = \frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{33})$.
De algemene oplossing voor $n_i$ is

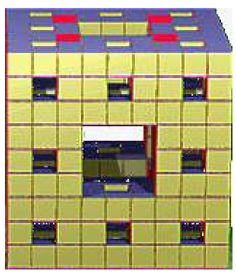
$$aq_+^i + bq_-^i$$

met $a + b = 1$ en $aq_+ + bq_- = 12$. De dimensie kunnen we bepalen door:

$$\dim \Pi \cap M = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(aq_+^n + bq_-^n)}{\ln 3^n} = \frac{\ln q_+}{\ln 3} = \frac{\ln \frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{33})}{\ln 3}.$$

(d) Als we kijken naar $M_i$ dan bevat $M_i$, $4^i$ torens van kubusjes met hoogte 1 in de $z$-richting. Dit is duidelijk voor $M_0$. Als dit geldt voor $M_i$ dan zien we dat $M_{i+1}$ 4 keer 3 kopieën van $M_i$ op elkaar gestapeld bevat. Elke toren in $M_i$ levert daarom 4 torens in $M_{i+1}$ op dus zijn er $4 * 4^i = 4^{i+1}$ zulke torens. De doorsnede van $M_i$ met het vlak $z = 0$ bestaat uit één kubusje voor elke toren dus de dimensie van de doorsnede is $\ln 4/\ln 3$.

(e) We tonen aan dat voor elk ander vlak $\Xi$ de dimensie ook minstens $\ln 4/\ln 3$ is. Wegens symmetrieredenen kunnen we veronderstellen dat $0 \le a \le b \le c$. Voor $M_i$ noemen we de binnentorens de 4 torens die grenzen aan de rechten $(\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{6}, \mathbb{R})$.



(De 4 binnentorens voor $i = 2$)

Vanaf $i > 3$ zijn de binnentorens bevat in $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Aangezien

$$| \pm \frac{1}{4}a + \pm\frac{1}{4}b| \le \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}c = \frac{c}{2}.$$

snijdt het vlak $ax + by + cz = 0$ alle 4 de binnentorens van $M_3$ volledig door. Door de recursie wordt elke binnentoren van $M_3$ vervangen door 4 torens, die weer vervangen worden door 4 torens etc. Bijgevolg doorsnijdt het vlak minstens $4^{i-2}$ kubusjes van $M_i$ en dus is

$$\dim \Xi \cap M \ge \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(4^{n-2})}{\ln 3^n} = \ln 4/\ln 3.$$

Wiskunde Onderzoekschool nederland

2015/16

The Dutch Research School in Mathematics

WONDER is the *Dutch Research School in Mathematics*, coordinating the national master and graduate program and training of (prospective) PhD students.

see http://web.science.uu.nl/wonder

> In for a challenge? Take a **WONDER advanced course in mastermath**. 2016-2017 courses: complex networks, adv. combinatorics, queues & Levy fluctuation theory, Galois representations/automorphic forms, Bayesian statistics, semidefinite programming and topological methods for diff. eq.

> Take part in a **WONDER school for graduate students**. In 2016-2017 we expect to have schools on financial mathematics, geometry and quantum theory, nonlinear dynamics, stochastics, etc.

> Take part in a **WONDER minicourse**. Monitor the website for announcements.

> All graduated students automatically participate in a competition for the **Stieltjes prize** for the best Dutch PhD thesis in mathematics.

## 8. Vermenigvuldigen met 2

*Dr. H. (Han) Peters*
*Universiteit van Amsterdam*

Bij iteratieproblemen blijkt vaak dat zelfs de eenvoudigste functies al tot behoorlijk gecompliceerd gedrag kunnen leiden. We bekijken hier een aantal problemen die ontstaan bij het herhaalderlijk vermenigvuldigen met het getal 2.
Om preciezer te zijn definiëren we de functie $f : [0, 1) \to [0, 1)$ gegeven door

$$f(x) = 2 \cdot x \mod 1.$$

Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de $n$-de iteratie van $f$ door $f^1 = f$ en

$$f^n = f^{n-1} \circ f.$$

Een punt $x \in [0, 1)$ heet periodiek van orde $k \in \mathbb{N}$ als

$$f^k(x) = x$$

en

$$f^j(x) \neq x$$

voor $1 \leq j < k$. Een voorbeeld van een periodiek punt van orde 4 is het punt $\frac{1}{5}$, want $\frac{1}{5} \mapsto \frac{2}{5} \mapsto \frac{4}{5} \mapsto \frac{3}{5} \mapsto \frac{1}{5}$.
Schrijf nu

$$P_n = \{x \in [0, 1) : f^n(x) = x\}$$

en

$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_n.$$

(a) Bewijs dat de verzameling van periodieke punten $P$ precies gelijk is aan de verzameling rationale getallen met oneven noemer, het getal $0 = 0/1$ meegerekend.

Het blijkt dat de periodieke punten niet alleen dicht liggen in $[0, 1)$, maar zich in zekere zin zelfs gelijkelijk verpreiden over het interval $[0, 1)$.
We zeggen dat een rij $(E_n)$, bestaande uit eindige deelverzamelingen van $[0, 1)$, zich gelijkelijk verspreiden over $[0, 1)$ als voor elk niet-leeg open interval $(a, b) \subset [0, 1)$ geldt dat

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#(E_n \cap (a, b))}{\# E_n} = b - a.$$

(b) Bewijs dat de rij $(P_n)$ zich gelijkelijk verspreidt over $[0, 1)$.

**Uitwerking.**
(a) Stel $f^n(x) = x$. Dan geldt dat

$$2^n \cdot x - a = x$$

voor zekere $a \in \mathbb{Z}^+$. Maar dan volgt dat

$$x = \frac{a}{2^n - 1}.$$

Dus is $x = \frac{p}{q}$, met $q$ oneven.

Stel aan de andere kant dat $x = \frac{p}{q}$, met $q$ oneven. Omdat $f(0) = 0$ mogen we wel aannemen dat $p \neq 0$. Schrijf $V_q$ voor de verzameling van zulke getallen, met andere woorden

$$V_q = \{\frac{p}{q} \,:\, p = 1, \ldots q-1\}.$$

Omdat

$$f(\frac{p}{q}) = \frac{2p}{q} \quad \text{of} \quad f(\frac{p}{q}) = \frac{2p-q}{q}$$

volgt dat $f : V_q \to V_q$. Het is eenvoudig te controleren dat $f|_{V_q}$ injectief is, dus $f$ geeft een permutatie van de eindige verzameling $V_q$. Maar dan is de baan van elk element in $V_q$ cyclisch.

(b) De binaire ontwikkeling geeft een injectie van het interval $[0, 1)$ naar de verzameling

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}},$$

waar het beeld bestaat uit alle rijtjes die niet op alleen maar 1-en eindigen. De afbeelding $f$ is conjugent aan de zogenaamde "$shift''$-afbeelding, gegeven door

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots).$$

In deze notatie worden de periodieke getallen van orde $n$ vastgelegd door de eerste $n$ cijfers in de binaire ontwikkeling. Omdat $(1, \ldots, 1)$ niet is toegestaan zijn er dus $2^n - 1$ periodieke getallen van orde $n$.
In de vorige opgave hebben we al gezien dat

$$P_n \subset \{\frac{p}{2^n - 1} \,:\, p = 0, \ldots 2^n - 2\}.$$

Omdat $P_n$ precies $2^n - 1$ elementen bevat moet zelfs gelden dat

$$P_n = \{\frac{p}{2^n - 1} \,:\, p = 0, \ldots 2^n - 2\}.$$

Het feit dat de rij $(P_n)$ zich gelijkelijk verspreidt volgt eenvoudig.

Radboud University

# Masteropleiding aan de Radboud Universiteit

Alle bacheloropleidingen van de Radboud Universiteit hebben een bijbehorende master, waar je zonder extra eisen kunt instromen. Door binnen je bachelor bepaalde keuzevakken te kiezen, kun je soms een andere master van de Radboud Universiteit volgen. Met het behalen van je masterdiploma mag je je Master of Science (MSc) noemen.

De masteropleiding Mathematics duurt twee jaar en wordt in het Engels aangeboden. In de master specialiseer je jezelf in een bepaald vakgebied en in een aantal vaardigheden. Je maakt een keuze voor een mastertrack die je goed voorbereidt op de arbeidsmarkt.

**Mastertracks**

Aan de start van je master maak je een keuze voor een mastertrack. Binnen de masteropleiding Mathematics kun je kiezen uit zeven mastertracks. Onderstaande tracks sluiten aan bij het wetenschappelijk onderzoek dat plaatsvindt binnen de Radboud Universiteit en die tot de internationale top behoort. Je kiest voor één van deze tracks als je het leuk vindt om fundamenteel of toegepast onderzoek te doen in de wiskunde. Als onderdeel van je master doe je twee onderzoeksstages onder begeleiding van een wetenschappelijk onderzoeker die ook docent is. Tenminste een onderzoeksstage doe je bij een onderzoeksgroep van de Radboud Universiteit, de tweede stage kun je doen bij een universiteit of bedrijf in binnen- of buitenland. Na je master kun je een vierjarig promotieonderzoek doen aan een universiteit, waarin je je verder specialiseert in het doen van wetenschappelijk onderzoek, of je gaat werken bij bijvoorbeeld een onderzoeksinstituut, een overheidsorganisatie of in het bedrijfsleven.

**Mastertrack Algebra and Topology**

Er zijn enkele specialismen binnen deze richting die elkaar wederzijds beïnvloeden en inspireren: algebraïsche Meetkunde, algebraïsche topologie, computeralgebra en logica.

**Mastertrack Mathematical Physics**

De mastertrack Mathematical Physics sluit aan op een bachelor wiskunde met minor natuurkunde (of omgekeerd), en natuurlijk helemaal op een dubbele bachelor natuurkunde en wiskunde.

**Mastertrack Applied stochastics**

Maatschappelijk richt deze specialisatie zich op zowel de medische wereld als het bedrijfsleven, bv via het onderdeel Statistics in Health en de Statistische Helpdesk van de Radboud universiteit.

www.ru.nl/master

## 9. Goudkoorts

*S. (Sjoerd) Boersma MSc.*
*Universiteit Utrecht*

We spelen een spel.

(a) Je hebt maximaal $n$ ($n$ een geheel getal groter dan nul) beurten om zo veel mogelijk goud te verdienen. In elke beurt moet je een getal $p$ kiezen tussen 0 en 1 (je mag ook 0 of 1 zelf kiezen). Je krijgt nu eerst $p$ kilo goud, maar tevens is er een kans van $p$ dat hierna direct het spel voorbij is. Als er $n$ beurten geweest zijn is het spel ook afgelopen. Wat is de verwachtingswaarde van de hoeveelheid goud die je wint bij een optimale strategie[1]?

(b) Dezelfde vraag, maar nu is het aantal beurten niet beperkt (indien er geen optimale strategie is, vind dan het supremum).

(c) Wat is het antwoord op de vorige vraag als je niet $p$ kilo goud, maar $\sqrt{p}$ kilo goud krijgt als je $p$ kiest?

(d) Beschouw nu een situatie waarbij het aantal beurten beperkt is tot $n$ en je wanneer je $p$ kiest $\sqrt{p}$ kilo goud krijgt. Laat $d(n)$ de verwachtingswaarde zijn bij een optimale strategie als er $n$ beurten zijn. Dit betekent dat $d(1) = 1$ en $d(2) = \frac{5}{4}$. Vind een recursieve formule die $d(n)$ uitdrukt als functie van $d(n-1)$ voor $n > 1$.

**Uitwerking.**
(a) Voor $n = 1$ geldt dat een keuze van $p \in [0, 1]$ leidt tot een uitbetaling van $p$. Het beste is dus om $p = 1$ te kiezen, omdat het spel na deze ronde sowieso afloopt. Met inductie laten we zien dat voor $n > 1$ de verwachtingswaarde van de uitbetaling ook 1 is. Stel dit is waar voor een zeker aantal rondes $k$. Geef met $a(x)$ de verwachtingswaarde bij de optimale strategie aan als er $x$ rondes zijn. Dan geldt:

$$a(k+1) = \max_{p\in[0,1]} [p + (1-p) \cdot a(k)] = \max_{p\in[0,1]} [p + (1-p) \cdot 1] = \max_{p\in[0,1]} 1 = 1.$$

Uit inductie volgt dat bij de optimale strategie[2] de verwachtingswaarde van uitbetaling 1 is.

(b) De optimale keus van $p$ is niet afhankelijk van het aantal beurten dat al is geweest of hoeveel geld er al is verdiend: de regels voor de toekomst van het spel zijn altijd hetzelfde bij het keuzemoment voor $p$ in een beurt. Dus als $p$ een optimale keuze in beurt 1 is, is het dat ook in elke andere beurt, en is het een optimale strategie om altijd $p$ te kiezen. Geef met $b(p)$ aan de verwachtingswaarde van uitbetaling als we altijd $p$ kiezen. Er geldt:

$$b(p) = p + (1-p) \cdot b(p).$$

Deze vergelijking heeft twee oplossingen: $b(p) = 1$ en $p = 0$. Voor $p = 0$ geldt echter dat het spel oneindig lang doorgaat en er nooit goud wordt verdiend. Dus geldt dat $b(p) = 1$ en dat deze verwachtingswaarde onder andere wordt verkregen door steeds hetzelfde getal groter dan nul te kiezen.[3]

[1] Een optimale strategie is er één waarbij de verwachtingswaarde van de hoeveelheid goud die je krijgt maximaal is.

[2] Elke strategie is optimaal, zoalng je in de laatste ronde 1 kiest als je daar aankomt.

[3] Overigens zijn veel strategieën optimaal, zolang je maar niet vanaf een gegeven moment steeds nul kiest of bepaalde naar nul convergerende reeksen gebruikt, zoals $2^{-n}$.

(c) Laat $c(p)$ de verwachte uitbetaling zijn als je altijd $p$ kiest. Dan geldt:

$$c(p) = \sqrt{p} + (1-p)\cdot c(p).$$

Deze vergelijking lost op tot $p = 0$ en $c(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ voor $p > 0$. Vullen we nu voor $k > 0$ de getallen $4^{-k}$ in voor $p$, dan vinden we:

$$c(4^{-k}) = \frac{1}{\sqrt{4^{-k}}} = \sqrt{4^k} = 2^k.$$

Voor elk natuurlijk getal $t$ is er een $k$ te vinden zodat $t < 2^k = c(4^{-k})$, dus is er voor elke $t$ een strategie die als verwachtingswaarde een getal groter dan $t$ heeft. Het supremum van verwachtingswaardes van alle strategieën is dus $\infty$.

(d) Laat $d(n|p)$ de verwachtingswaarde zijn van de hoeveelheid goud als er $n$ beurten zijn, waarbij je de eerste beurt $p$ kiest en daarna de optimale strategie volgt. Er geldt dan, als er een maximum is:

$$d(n) = \max_{p\in[0,1]} d(n|p).$$

We gaan de waarde $p$ bepalen waarop dit maximum wordt behaald. Er geldt:

$$d(n|p) = \sqrt{p} + (1-p)\cdot d(n-1).$$

En voor $p > 0$:

$$\frac{d}{dp}d(n|p) = \frac{d}{dp}\left[\sqrt{p} + (1-p)\cdot d(n-1)\right] = \frac{1}{2\sqrt{p}} - d(n-1).$$

Aangezien $d(n|p)$ een continue functie is op het interval $[0,1]$, is het maximum te vinden in 0, 1 of een nulpunt van de afgeleide. Voor het nulpunt van de afgeleide geldt:

$$0 = \frac{d}{dp}d(n|p) = \frac{1}{2\sqrt{p}} - d(n-1),$$

ofwel:

$$p = \frac{1}{4\cdot d(n-1)^2}.$$

Voor deze $p$ geldt:

$$d\left(n|\frac{1}{4\cdot d(n-1)^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4\cdot d(n-1)^2}} + \left(1 - \frac{1}{4\cdot d(n-1)^2}\right)\cdot d(n-1) =$$

$$\frac{1}{2\cdot d(n-1)} + d(n-1) - \frac{1}{4\cdot d(n-1)} = d(n-1) + \frac{1}{4\cdot d(n-1)}.$$

Als we dan nog opmerken dat $d(k)$ voor alle $k > 0$ minstens 1 is, omdat $p = 1$ kiezen een strategie is, zien we dat, voor $n > 1$:

$$d(n|0) = d(n-1) < d(n-1) + \frac{1}{4\cdot d(n-1)} = d\left(n|\frac{1}{4\cdot d(n-1)^2}\right),$$

$$d(n|1) = 1 \leq d(n-1) < d\left(n|\frac{1}{4\cdot d(n-1)^2}\right).$$

Aangezien $\frac{1}{4 \cdot d(n-1)^2}$ het enige nulpunt is van de afgeleide en het groter een grotere functiewaarde van $d(n|\cdot)$ oplevert dan 0 en 1, is het een lokaal maximum en tevens het globale maximum. De conclusie is nu dat:

$$d(n) = \max_{p \in [0,1]} d(n|p) = d\left(n|\frac{1}{4 \cdot d(n-1)^2}\right) = d(n-1) + \frac{1}{4 \cdot d(n-1)} \ \forall n > 1.$$

# Knap staaltje denkwerk!

## Weet jij al wat je na je bachelor gaat doen? Wil jij...

... zelf bepalen hoe je master eruit komt te zien, zonder verplichte vakken?

... alvast vooruitlopen op je toekomstige baan, met combinatiemasters bijvoorbeeld richting bedrijfsleven of onderwijs?

... over de grenzen van Nederland heen kijken, zoals met het ALGANT uitwisselingsprogramma voor algebra, meetkunde en getaltheorie?

... persoonlijk contact met je docenten in een kleinschalige opleiding?

... studeren aan een instituut dat toonaangevend is, zowel in de fundamentele als in de toegepaste wiskunde?

**Dan is een master Wiskunde aan de Universiteit Leiden iets voor jou!**

Kijk voor meer informatie op *www.math.leidenuniv.nl/master*.

Universiteit Leiden

Bij ons leer je de wereld kennen

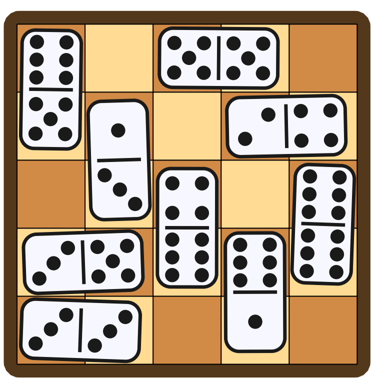
## 10. Schaakborden en dominostenen

*J. (Josse) van Dobben de Bruyn BSc.*
*Universiteit Leiden*

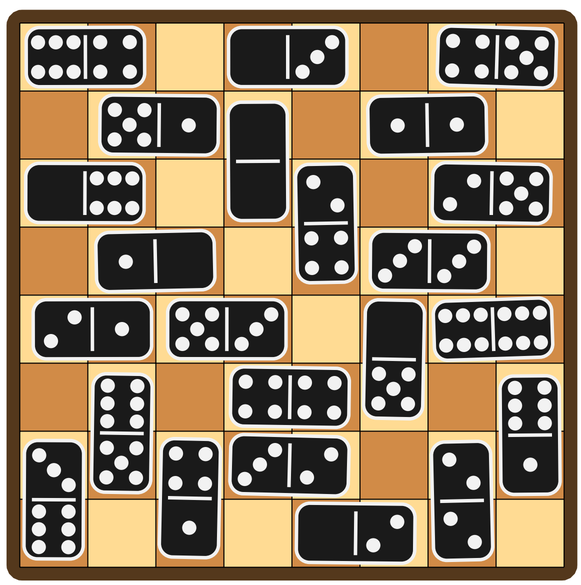
**Notatie.** We schrijven $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Het is een druilerige dag in juni. Je bevindt je in een fel verlichte televisiestudio waar je meedoet aan opnamen van een nieuwe spelshow. Je hebt al allerlei beproevingen doorstaan en inmiddels heb je de finale gehaald. Hier word je geconfronteerd met een $k \times k$ schaakbord voor zekere $k \in \mathbb{N}^+$. Je beschikt bovendien over $\lfloor \frac{k^2}{2} \rfloor$ dominostenen, die wonderbaarlijk genoeg precies twee keer zo groot zijn als de vakjes van het schaakbord. Met andere woorden: één goed geplaatste dominosteen bedekt precies twee aangrenzende velden van het schaakbord.

De gastheer legt nu de regels van het finalespel uit. Je moet het schaakbord bedekken met dominostenen net zolang tot er geen steen meer bij past. Elke steen moet precies twee velden van het schaakbord bedekken (en mag dus ook niet uitsteken buiten de randen van het bord). De stenen moeten bovendien plat op het bord liggen en dus niet over elkaar heen. Het spel is voorbij zodra er geen steen meer bij past. Merk op dat het onmogelijk is om in een situatie te belanden waarin alle dominostenen op zijn maar het spel nog niet voorbij is. De prijs die je uiteindelijk mee naar huis krijgt, is één euro voor ieder vakje op het schaakbord dat aan het eind van het spel nog leeg is.



Voorbeeld 1: $f(5) \geq 7$.



Voorbeeld 2: $f(8) \geq 18$.

Zij $f(k)$ het maximale bedrag dat je mee naar huis kunt krijgen (bij optimaal spel) als het spel wordt gespeeld op een $k \times k$ schaakbord. Bewijs dat geldt

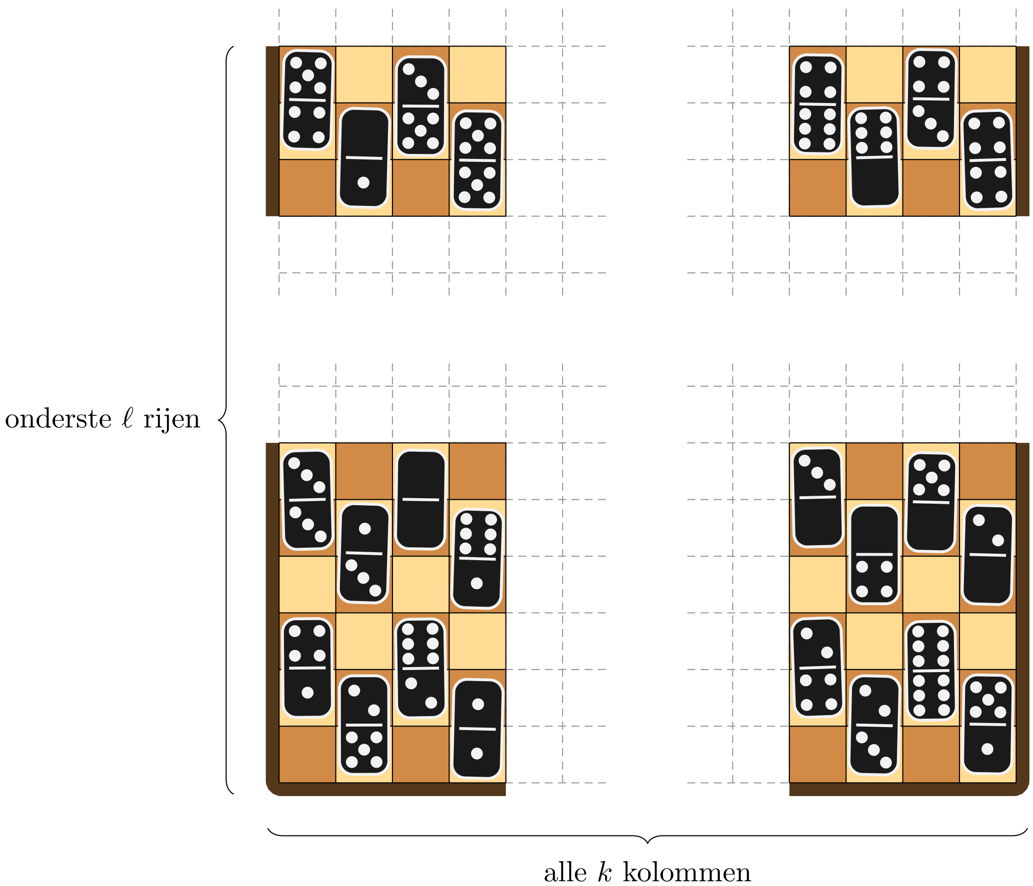
$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(k)}{k^2} = \frac{1}{3}.$$

(Hint: vind $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ zodat $\frac{1}{3}k^2 + a_1 k + a_2 \leq f(k) \leq \frac{1}{3}k^2 + b_1 k + b_2$ geldt voor voldoende grote waarden van $k$.)

**Uitwerking.**

**Ondergrens**

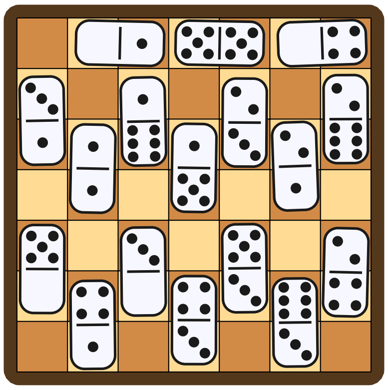
Zij $k \geq 3$ gegeven en kies $\ell \in \{k-2, k-1, k\}$ deelbaar door drie. We betegelen de onderste $\ell$ rijen van het schaakbord met $\frac{k \cdot \ell}{3}$ dominostenen en $\frac{k \cdot \ell}{3}$ lege velden, waarbij we het veld linksonder op het schaakbord leeg laten:

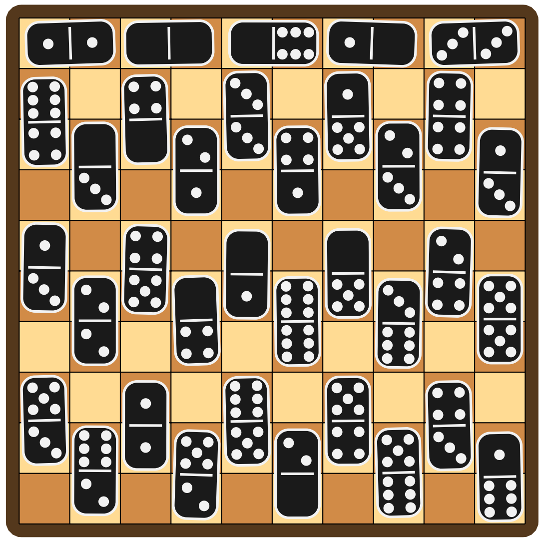


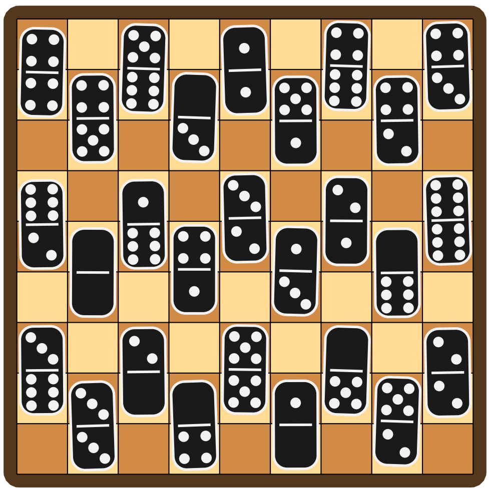

Nu hebben we nog een smalle strook van $k$ bij $k-\ell$ vakjes over, namelijk de bovenste $k-\ell$ rijen. Deze zullen we betegelen met dominostenen zodanig dat de lege velden uit de $\ell$-de rij worden geïsoleerd (en dus niet grenzen aan een leeg vakje in de $(\ell+1)$-ste rij). We onderscheiden drie gevallen:

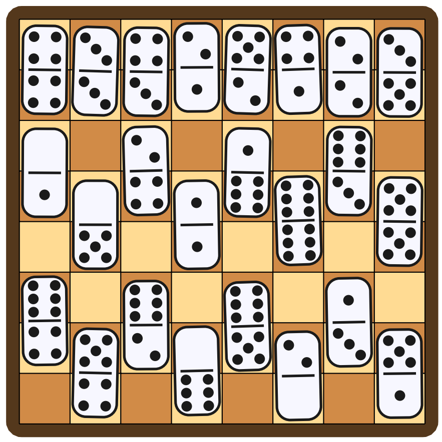
- Als $k \equiv 0 \pmod 3$ geldt, dan hebben we het hele schaakbord al betegeld. Alle lege velden zijn geïsoleerde velden.
- Als $k \equiv 1 \pmod 3$ geldt, dan hebben we nog één rij van het schaakbord niet ingevuld. Deze rij leggen we van rechts naar links vol met dominostenen:
  - Als $k$ even is, hebben we een volle rij met dominostenen.
  - Als $k$ oneven is, dan zal het linker veld van de bovenste rij leeg blijven. Dit veld grenst echter niet aan een leeg veld in de $\ell$-de rij, dus wederom zijn alle lege velden uit de onderste $\ell$ rijen geïsoleerd.
- Als $k \equiv 2 \pmod 3$ geldt, dan kunnen we de bovenste twee rijen helemaal vullen met verticaal georiënteerde dominostenen.

Hieronder staat van elke van de verschillende gevallen een voorbeeld afgebeeld.









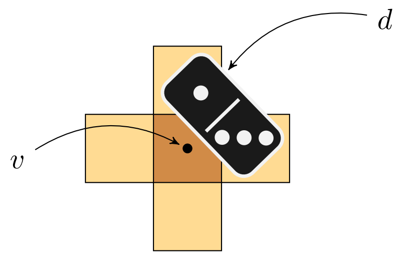
In elk van de gevallen hebben we minstens $\frac{k \cdot \ell}{3}$ lege velden en geldt $\ell \geq k - 2$. Kortom: voor alle $k \geq 3$ geldt

$$f(k) \geq \frac{k \cdot (k-2)}{3} = \tfrac{1}{3}k^2 - \tfrac{2}{3}k.$$

Gezien we uiteindelijk alleen geïnteresseerd zijn in de limiet, kunnen we het onszelf makkelijk maken door alle randgevallen (kleine waarden van $k$) buiten beschouwing te laten. De gevonden ondergrens geldt echter ook voor $k \in \{1, 2\}$. In dat geval geldt $\ell = 0$. Het is een beetje vreemd om te spreken van een betegeling van de onderste 0 rijen, maar het is eenvoudig in te zien dat het argument in deze gevallen ook werkt.

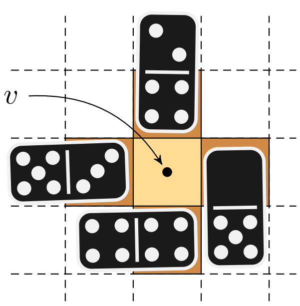
## Bovengrens

Zij een willekeurige eindsituatie gegeven: een configuratie van dominostenen op het schaakbord zodat er geen steen meer bij past. Zij $D$ de verzameling dominostenen in deze eindsituatie en $L$ de verzameling lege velden. We zeggen dat twee velden op het schaakbord *aangrenzend* zijn als ze een gemeenschappelijke zijde hebben. Met andere woorden: velden kunnen alleen horizontaal of verticaal aan elkaar grenzen, niet diagonaal, en elk veld grenst aan hooguit 4 andere velden. We zeggen bovendien dat een leeg veld $v \in L$ een dominosteen $d \in D$ *kan zien* als $d$ minstens één van de aangrenzende velden van $v$ bedekt. Merk op dat een dominosteen $d \in D$ niet meer dan één aangrenzend veld van een leeg veld $v \in L$ kan bedekken:




De dominosteen $d$ kan niet meer dan één aangrenzend veld van $v$ bedekken. (De getoonde situatie is niet toegestaan; elke dominosteen moet twee *aangrenzende* velden bedekken.)

Omdat er geen dominostenen meer op het schaakbord passen, zijn alle aangrenzende velden van $v$ bedekt. Als $v$ niet aan de rand ligt, ziet het dus precies vier *verschillende* dominostenen:




Een leeg veld $v \in L$ dat wel aan de rand ligt, ziet twee of drie verschillende dominostenen en één of twee stukken rand.

We geven nu twee verschillende manieren om af te leiden dat $|L| \leq \frac{1}{3}k^2 + b_1 k + b_2$ geldt voor reële getallen $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. In beide gevallen vinden we eerst de ongelijkheid $|L| \leq |D| + k$ en leiden we daar een bovengrens op $|L|$ uit af.

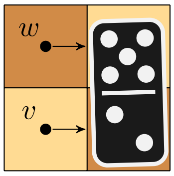
**Methode 1 (injectieve functie)**

Zij $D' = D \cup \{1, 2, \ldots, k\}$ de disjuncte[4] vereniging van $D$ met de eindige verzameling $\{1, 2, \ldots, k\}$. Nummer de rijen van het schaakbord van boven naar beneden 1 tot en met $k$. We definiëren nu de functie $g : L \to D'$ als volgt:

$$g(v) = \begin{cases} \text{de unieke dominosteen rechts van } v & \text{als } v \text{ niet aan de rechter rand van het bord ligt;} \\ \text{het nummer van de rij van } v & \text{als } v \text{ wel aan de rechter rand van het bord ligt.} \end{cases}$$

We bewijzen dat $g$ injectief is. Zij $v, w \in L$ gegeven met $v \neq w$. We onderscheiden drie gevallen:

- Neem aan dat $v$ en $w$ beide niet aan de rechter rand van het bord liggen, en stel dat $g(v) = g(w)$ geldt. Als we vanuit $v$ en $w$ naar rechts kijken, zien we twee keer dezelfde dominosteen $d = g(v) = g(w) \in D$. Deze gemeenschappelijke dominosteen $d$ moet nu wel verticaal geöriënteerd liggen, en $v$ en $w$ zijn aangrenzende lege velden:

  Nu past er echter een extra dominosteen op het schaakbord die de lege velden $v$ en $w$ bedekt, in tegenspraak met de aanname dat we in een eindsituatie zitten. Uit deze tegenspraak leiden we af dat $g(v) \neq g(w)$ moet gelden.

- Als $v$ en $w$ aan de rechter rand van het bord liggen, is het duidelijk dat $g(v) \neq g(w)$ geldt: twee verschillende lege velden in dezelfde kolom (de rechter kolom van het schaakbord) liggen noodzakelijkerwijs in verschillende rijen.

- Als één van de twee aan de rechter rand van het bord ligt en de ander niet, dan volgt $g(v) \neq g(w)$ omdat een getal nooit gelijk is aan een dominosteen.

We zien dat $g$ injectief is. Hieruit volgt:

$$|L| \;\leq\; |D'| \;=\; |D| + k.$$

Sterker nog: in de rechter kolom bevinden zich hooguit $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ vrije velden, dus we hebben

$$|L| \;\leq\; |D| + \left\lceil \tfrac{k}{2} \right\rceil \;\leq\; |D| + \tfrac{k+1}{2}.$$

Merk op dat geldt $2 \cdot |D| + |L| = k^2$, dus uit het bovenstaande volgt

$$|L| \;\leq\; |D| + \tfrac{k+1}{2} \;=\; \tfrac{1}{2}\left(k^2 - |L|\right) + \tfrac{k+1}{2}.$$

Dit geeft

$$\tfrac{3}{2} \cdot |L| \;\leq\; \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2},$$

en dus

$$|L| \;\leq\; \tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{1}{3}k + \tfrac{1}{3}.$$

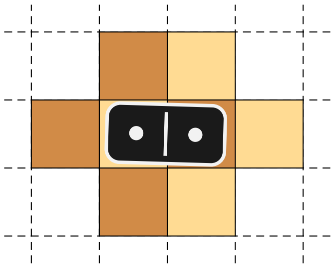
Deze afschatting geldt voor iedere eindsituatie, dus ook bij optimaal spel. Kortom: voor alle $k \in \mathbb{N}^+$ geldt

$$f(k) \;\leq\; \tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{1}{3}k + \tfrac{1}{3}.$$

[4] Hier nemen we aan dat geen enkel geheel getal gelijk is aan een dominosteen; een redelijke aanname.

**Methode 2 (*double counting*)**

Ter herinnering: een gegeven leeg veld $v \in L$ ziet vier verschillende dominostenen, of minder als $v$ aan de rand ligt. In totaal zijn er $4k$ stukken rand, dus alle lege velden bij elkaar zien minstens $4 \cdot |L| - 4k$ dominostenen. In deze telling worden sommige dominostenen echter dubbel geteld: een dominosteen kan zichtbaar zijn vanaf verschillende lege velden. Een dominosteen heeft 6 aangrenzende velden:



Onder de zes velden die grenzen aan de dominosteen $d$, bevinden zich twee paar aangrenzende velden (in de afbeelding boven en onder de dominosteen). Van elk paar aangrenzende velden kan er hooguit één leeg zijn in een eindsituatie, omdat er anders nog minstens één extra dominosteen op het schaakbord past. Elke dominosteen wordt dus door hooguit 4 lege velden gezien.

Als we vanuit alle lege velden kijken, zien we dus minstens $4 \cdot |L| - 4k$ en hoogstens $4 \cdot |D|$ dominostenen. In het bijzonder volgt dat $4 \cdot |L| - 4k \leq 4 \cdot |D|$ geldt, dus

$$|D| \geq \frac{4 \cdot |L| - 4k}{4} = |L| - k.$$

Merk op dat geldt $2 \cdot |D| + |L| = k^2$, dus uit bovenstaande ongelijkheid volgt

$$|L| \leq |D| + k = \tfrac{1}{2}\big(k^2 - |L|\big) + k.$$

Dit geeft

$$\tfrac{3}{2} \cdot |L| \leq \tfrac{1}{2}k^2 + k,$$

en dus

$$|L| \leq \tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{2}{3}k.$$

Deze afschatting geldt voor iedere eindsituatie, dus ook bij optimaal spel. Kortom: voor alle $k \in \mathbb{N}^+$ geldt

$$f(k) \leq \tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{2}{3}k.$$

Ook hier kan de afschatting worden bijgeschaafd naar $f(k) \leq \frac{1}{3}k^2 + \frac{1}{3}k + \frac{1}{3}$ door een iets betere afschatting te maken van het aantal lege velden aan de rand van het schaakbord. Voor de opgave is een iets zwakkere bovengrens echter geen probleem.

### Limiet

Voor alle $k \geq 3$ geldt

$$\tfrac{1}{3}k^2 - \tfrac{2}{3}k \ \leq\ f(k) \ \leq\ \tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{2}{3}k,$$

dus

$$\frac{\tfrac{1}{3}k^2 - \tfrac{2}{3}k}{k^2} \ \leq\ \frac{f(k)}{k^2} \ \leq\ \frac{\tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{2}{3}k}{k^2}.$$

Bovendien geldt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tfrac{1}{3}k^2 - \tfrac{2}{3}k}{k^2} \ =\ \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3k}\right) \ =\ \frac{1}{3};$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{2}{3}k}{k^2} \ =\ \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3k}\right) \ =\ \frac{1}{3}.$$

Uit de knijpstelling (ook wel bekend als de insluitstelling) volgt nu dat

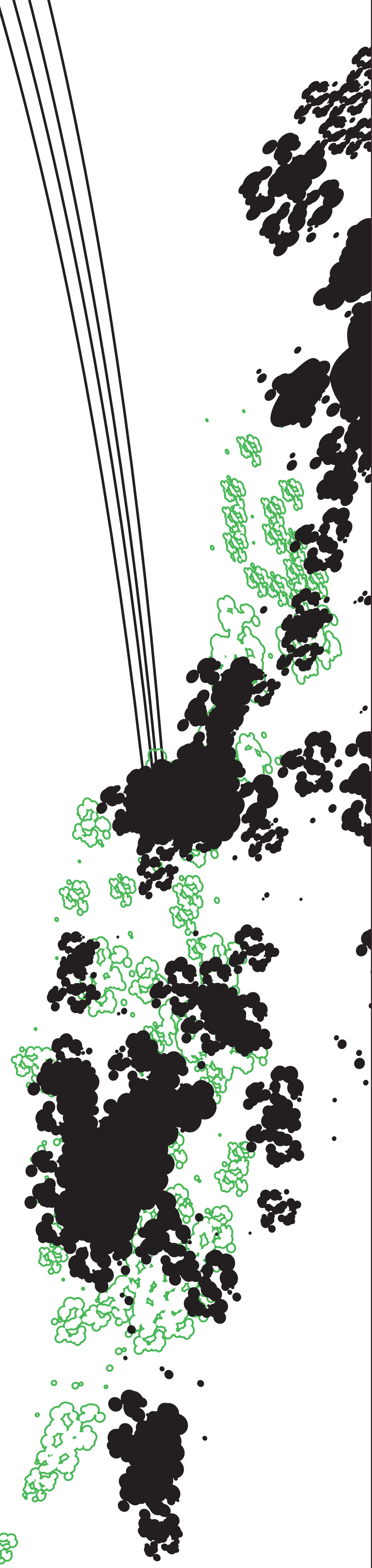
$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k^2} \ =\ \frac{1}{3}.$$

### Tot slot

De bovengrens op $f(k)$ is nog steeds meer dan $k$ verwijderd van de gevonden ondergrens. Ik heb nog geen betere bovengrens gevonden, maar ik vermoed dat $f(k) \leq \frac{1}{3}k^2$ geldt voor alle $k \geq 2$, met gelijkheid dan en slechts dan als $k$ deelbaar is door drie. Merk op dat deze vermoedelijke bovengrens niet geldt voor $k = 1$: we hebben immers $f(1) = 1 > \frac{1}{3}$.

In de gemaakte constructie is er nog ruimte voor een verbetering van ongeveer $\frac{1}{3}k$ euro in het geval $k \equiv 2 \pmod 3$: betegel de bovenste twee rijen horizontaal in plaats van verticaal, dan kun je op de bovenste rij $\frac{k-2}{3}$ velden leeg laten. (De rij daaronder heeft één leeg veld als $k$ oneven is en anders nul.) Beter dan dit lijkt het niet te worden.

Misschien vindt één van de teams een bewijs waaruit blijkt dat $f(k) \leq \frac{1}{3}k^2$ geldt voor alle $k \geq 2$, of misschien is het resultaat al lang bekend in de literatuur. Maar misschien is het ook wel helemaal niet waar!



# CHOOSE YOUR MASTER IN TWENTE!

## MASTER
## APPLIED MATHEMATICS

**Specializations**

- Operations Research
- Mathematical Physics and Computational Mechanics
- Mathematics and Applications of Signals and Systems

## 3TU MASTER
## SYSTEMS & CONTROL

www.utwente.nl/master/am
www.utwente.nl/master/sc

UNIVERSITY OF TWENTE.

## 11. Fibonacci matrices

*Prof. dr. F.M. (Michel) Dekking*
*Technische Universiteit Delft*

Een $r \times r$ matrix $M$ heet een *Fibonacci matrix* als

1. $M = (m_{i,j})$ niet-negatief is (d.w.z. voor alle $i, j = 1, \dots, r$ is $m_{ij} \geq 0$),
2. de $m_{ij}$ gehele getallen zijn,
3. de grootste eigenwaarde van $M$ de gulden snede $\Phi := (1 + \sqrt{5})/2$ is (oplossing van $x^2 = x + 1$),
4. $M$ *primitief* is, d.w.z. er bestaat een positief geheel getal $n$ zó, dat de matrix $M^n = (m^n_{ij})$ strikt positief is—alle $m^n_{ij} > 0$.

We noteren $\mathcal{F}_r$ voor de verzameling van alle $r \times r$ Fibonacci matrices.

MINICURSUS Niet-negatieve primitieve matrices.
1) Als de niet-negatieve $r \times r$ matrix $M$ primitief is, dan is er een rëele positieve eigenwaarde $\lambda_{\mathrm{PF}}$ zó, dat $\lambda_{\mathrm{PF}} > |\lambda|$ voor alle andere eigenwaarden $\lambda$ van $M$, en de bijbehorende eigenvector (links of rechts) is strikt positief. De eigenwaarde $\lambda_{\mathrm{PF}}$ heet de Perron-Frobenius eigenwaarde. De eigenvectoren van de andere eigenwaarden zijn *niet* strikt positief.
2) De eigenwaarde $\lambda_{\mathrm{PF}}$ ligt tussen de kleinste rijsom en de grootste rijsom van $M$ in.

(a) Wat is $\mathcal{F}_2$?

(b) Wat is $\mathcal{F}_3$?

(c) (Naar aanleiding van 2) in de minicursus) Kun je laten zien dat er matrices in $\mathcal{F}_r$ zijn met minstens één grote rijsom, bijvoorbeeld rijsom $r - 1$?

**Uitwerking.**

(a)
**First solution:**
Let $M$ be a non-negative primitive $2 \times 2$ integer matrix, with Perron-Frobenius eigenvalue the golden mean $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$. We write

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

The characteristic polynomial of $M$ is $\chi_M(u) = u^2 - Tu + D$, where $T = a + d$ is the trace of $M$, and $D = ad - bc$ is the determinant of $M$. Since $\Phi$ is an eigenvalue of $M$, we also have $\chi_M(u) = (u - \varphi)(u - \Phi)$, where $\varphi = (1 - \sqrt{5})/2$ is the other root of $x^2 = x + 1$.
This leads to

$$a + d = 1, \qquad ad - bc = -1.$$

These equations have two non-negative integer solutions: $a = 0, b = 1, c = 1, d = 1$, and $a = 1, b = 1, c = 1, d = 0$, leading to the matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

These are permutation conjugate (corresponding to a switch of the indices).

**Second solution:**
Use MINICURSUS 2). There can be no row $(0,0)$, and not two rows $(1,1)$, or larger, so there must be one row $(0,1)$ or $(1,0)$. Moreover, $(0,1)$ can not be the second row, and $(1,0)$ can not be the first row (because of primitivity). Computing the eigenvalues quickly leads to

$$M = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix}, \qquad M' = \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}.$$

(b) Let $M$ be a non-negative primitive $3 \times 3$ integer matrix, with Perron-Frobenius eigenvalue the golden mean $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$. We write

$$M = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \\ g\,h\,i \end{pmatrix}.$$

The characteristic polynomial of $M$ is $\chi_M(u) = u^3 - Tu^2 + Fu - D$, where $T = a+e+i$ is the trace of $M$, and

$$F = ae + ai + ei - bd - cg - fh, \quad D = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg. \tag{11.1}$$

Of course $D$ is the determinant of $M$. Since $\Phi$ is an eigenvalue of $M$, and we consider matrices over the integers, $u^2 - u - 1$ has to be a factor of $\chi_M$. Performing the division we obtain

$$\chi_M(u) = \big(u - (T-1)\big)\big(u^2 - u - 1\big),$$

and requiring that the remainder vanishes, yields

$$F = T - 2, \quad D = 1 - T. \tag{11.2}$$

Note that the third eigenvalue equals $\lambda_3 = T - 1$. According to the MINICURSUS this has to be smaller than $\Phi$ in absolute value, and since it is an integer, only $\lambda_3 = -1, 0, 1$ are possible. Thus there are only 3 possible values for the trace of $M$: $T = 0$, $T = 1$ and $T = 2$.

The smallest row sum of $M$ has to be smaller than the PF-eigenvalue $\Phi$ (see MINICURSUS). Therefore $M$ has to have one of the rows $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ or $(0,0,1)$. Also, because of primitivity of $M$, the 1 in this row can not be on the diagonal. By performing permutation conjugacies of the matrix we may then assume that $M$ has the form

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

The equation (11.1) combined with (11.2) then simplifies to

$$T - 2 = F = ei - d - fh, \quad 1 - T = D = fg - di. \tag{11.3}$$

**Case $T = 0$**
In this case $e = i = 0$, so (11.3) simplifies to

$$-2 = F = -d - fh, \quad 1 = D = fg. \tag{11.4}$$

Then $f = g = 1$, and so $d + h = 2$. This gives three possibilities leading to the matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Here the third matrix is permutation conjugate to the second one.

**Case $T = 1$**
In this case $e = 1, i = 0$, or $e = 0, i = 1$.
First case: $e = 1, i = 0$. Now (11.3) simplifies to

$$-1 = F = -d - fh, \quad 0 = D = fg. \tag{11.5}$$

Then $g = 0$, since $f = 0$ is not possible because of primitivity. But $g = 0$ also contradicts primitivity, as $d + fh = 1$, gives either $d = 0$ or $h = 0$.
Second case: $e = 0, i = 1$. Now (11.3) simplifies to

$$-1 = F = -d - fh, \quad 0 = D = fg - d. \tag{11.6}$$

Then $d = 0$ would imply that $f = h = 1$. But, as $g > 0$ because of primitivity, we get a contradiction with $fg = d = 0$.
On the other hand, if $d > 0$, then $d = 1$ and $f = 0$ or $h = 0$. But $fg = d = 1$ gives $f = g = 1$, so $h = 0$, and we get the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Case $T = 2$**
In this case $e = 1, i = 1$. Now (11.3) simplifies to

$$0 = F = 1 - d - fh, \quad -1 = D = fg - d. \tag{11.7}$$

Note first that $f = 0$ is not possible, because of primitivity. From $d + fh = 1$ follows $d \leq 1$, and so $d = 1$ (and $h = 0$) by $fg - d = -1$, which also implies $g = 0$. But $g = h = 0$ contradicts primitivity.

Final conclusion: there are three matrices in $\mathcal{F}_3$, modulo permutation conjugacies.

(c) There are many ways to obtain such a matrix. Here is one. Take the matrix $M$ with $M_{1,j} = 1$ for $j = 2, \ldots, r$, $M_{2,2} = 1$ and $M_{i,i+1} = 1$, for $i = 2, \ldots, r-1$, $M_{r,1} = 1$ and all other entries 0. It is easily checked that $M$ is primitive. For example, for $r = 5$ the matrix looks like

$$M = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Now note that $(1, \Phi, ..., \Phi)$ is a left eigenvector of $M$ with eigenvalue $\Phi$ (since $\Phi^2 = 1+\Phi$). Since the eigenvector has all entries positive, it must be the PF-eigenvector (see MINICURSUS), and hence $\Phi = \lambda_{\mathrm{PF}}$, and so $M$ is in $\mathcal{F}_r$.

Maastricht University

## Department of Data Science and Knowledge Engineering

# Master Operations Research

Operations Research is the science of making informed decisions. It has widespread applications in business and engineering. In today's world many companies and organisations collect all sorts of data in large amounts. They aim to extract useful information from it, to recognize patterns and anomalies.

Maastricht University's Master in Operations Research provides the mathematical tools to model and handle these big data. It also uses computational software that is the key to data science. We teach the use of applied mathematics to analyse and optimize processes, problems and operations.

**Visit our next Master's Open Day on Saturday 8 October 2016**

**For more info: www.maastrichtuniversity.nl/dke**

**12. Complexe afbeeldingen van matrices**

*Dr. F.J. (Fokko) van de Bult*
*Technische Universiteit Delft*

Voor een gegeven vaste $n$ bekijken we continue functies van $n \times n$ matrices met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$:

$$f_n : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

die voldoen aan de vergelijking

$$f_n(AB) = f_n(A) f_n(B).$$

(a) Bepaal alle oplossingen van deze vergelijking voor $n = 1$, dus voor functies $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(b) Bepaal nu alle oplossingen voor willekeurige $n$.

**Uitwerking.**

(a) Voor functies van $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ merken we eerst op dat $f_1(1) = f_1(1^2) = f_1(1)^2$, dus $f_1(1) = 1$ of $f_1(1) = 0$.

Als $f_1(1) = 0$, dan $f_1(z) = f_1(1 \cdot z) = f_1(1) f_1(z) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

Stel nu dat $f_1(1) = 1$. Wegens continuïteit van $f_1$ rond 1 geldt dat er een $\delta$ is zodat als $|x - 1| < \delta$, dan $|f_1(x) - 1| = |f_1(x) - f_1(1)| < 1$. In het bijzonder volgt dat $f_1(x)$ in dat geval in het rechterhalfvlak zit ($\Re(f_1(x)) > 0$). We gebruiken nu wat poolcoördinaten, dus $x = re^{i\phi}$ met $r > 0$ en $\phi \in \mathbb{R}$ (en vaak met een extra conditie.

**Lemma 1.** *Stel $|re^{i\phi} - 1| < \delta$, en schrijf $f_1(re^{i\phi}) = se^{i\psi}$ met $-\pi/2 < \psi < \pi/2$. Dan is $f_1(\sqrt{r}e^{i\phi/2}) = \sqrt{s}e^{i\psi/2}$.*

*Bewijs:* Merk op dat we de eis $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ kunnen stellen omdat het beeld van $re^{iphi}$ in het rechterhalfvlak ligt. Dan volgt $f_1(\sqrt{r}e^{i\phi/2})^2 = f_1(re^{i\phi}) = se^{i\psi}$. Er zijn twee getallen met $se^{i\psi}$ als kwadraat, maar slechts 1 in het rechterhalfvlak. Door de eis dat $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ ligt $\sqrt{s}e^{i\psi/2}$ in het rechterhalfvlak en omdat $|\sqrt{r}e^{i\phi/2} - 1| = \frac{|re^{i\phi}-1|}{|\sqrt{r}e^{i\phi/2}+1|} < |re^{i\phi} - 1| < \delta$, dus moet $f_1(\sqrt{r}e^{i\phi/2})$ in het recherhalfvlak liggen. Het resultaat volgt.

**Lemma 2.** *Stel $|re^{i\phi} - 1| < \delta$, en schrijf $f_1(re^{i\phi}) = se^{i\psi}$ met $-\pi/2 < \psi < \pi/2$. Dan is $f_1(r^{1/2^n}e^{i\phi/2^n}) = s^{1/2^n}e^{i\psi/2^n}$ voor $n \in \mathbb{N}$.*

*Bewijs:* Inductie met behulp van het vorige lemma.

**Lemma 3.** *Stel $|re^{i\phi} - 1| < \delta$, en schrijf $f_1(re^{i\phi}) = se^{i\psi}$ met $-\pi/2 < \psi < \pi/2$. Dan is $f_1(r^{k/2^n}e^{ki\phi/2^n}) = s^{k/2^n}e^{ki\psi/2^n}$, voor $n \in \mathbb{N}$ en $k \in \mathbb{Z}$.*

*Bewijs:* Voor $k > 0$ gebruiken we dat $f_1(x^k) = f_1(x)^k$ wegens inductie met de vergelijking van de opgave. Voor $k < 0$ gebruiken we $f_1(x)f_1(1/x) = f_1(1) = 1$.

Nu gaan we dit toepassen.

**Lemma 4.** *Stel $r$ voldoet aan $|r - 1| < \delta$ en $f_1(r) = r^\alpha e^{\beta i \ln(r)}$ met $-\pi/2 < \beta \ln(r) < \pi/2$. Dan is $f_1(x) = x^\alpha e^{\beta i \ln(x)}$ voor $x \in \mathbb{R}_{>0}$.*

*Bewijs:* We zien dat $\{r^{k/2^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ een dichte verzameling vormt van $\mathbb{R}_{>0}$. Uit het vorige lemma volgt $f_1(x) = x^\alpha e^{\beta i \ln(x)}$ voor $x = r^{k/2^n}$. Uit continuiteit volgt dan $f_1(x) = x^\alpha e^{\beta i \ln(x)}$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

**Lemma 5.** *Stel $\phi \not\in \pi\mathbb{Q}$ voldoet aan $|r - e^{i\phi}| < \delta$ en $f_1(e^{i\phi}) = a^\phi e^{i\gamma\phi}$ met $-\pi/2 < \gamma\phi < \pi/2$. Dan is $f_1(e^{i\psi}) = a^\psi e^{i\gamma\psi}$ voor alle $\psi \in \mathbb{R}$.*

*Bewijs:* Net als boven is $\{e^{i\phi k/2^n}\}$ een dichte verzameling van de eenheidscirkel. Derhalve volgt uit $f_1(e^{i\phi k/2^n}) = a^{phik/2^n} e^{i\gamma\phi k/2^n}$ het gevraagde.

Voor getallen op de eenheidscirkel hebben we echter een extra conditie.

**Lemma 6.** *Stel $f_1(e^{i\psi}) = a^\psi e^{i\gamma\psi}$, dan is $a = 1$ en $\gamma \in \mathbb{Z}$.*

*Bewijs:* We bekijken $f_1(e^{2\pi i/n}) = a^{2\pi/n} e^{2\pi i\gamma/n}$. Dan geldt $1 = f_1(1) = f_1((e^{2\pi i/n})^n) = a^{2\pi} e^{2\pi i\gamma}$, en volgt het gevraagde.

Voor algemene getallen vinden we dus

$$f_1(re^{i\phi}) = r^\alpha e^{\beta i \ln(r) + \gamma i\phi}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{Z}$$

Merk op dat dit goed gedefinieerd is voor getallen ongelijk 0 (onafhankelijk van de de keuzevrijheid in $\phi$) en voldoet aan de vergelijking. Alleen moeten we nog kijken wat er gebeurt met 0. Merk op dat $f_1(0) = f_1(0^2) = f_1(0)^2$, dus $f_1(0) = 0$ of $f_1(0) = 1$. Als $f_1(0) = 0$, dan moet $0 = \lim_{r\to 0} f_1(r) = \lim_{r\to 0} r^\alpha e^{\beta i \ln(r)}$, ofwel $\alpha > 0$. Als $f_1(0) = 1$ dan geldt voor alle $\phi$ dat $1 = \lim_{r\to 0} f_1(re^{i\phi}) = \lim_{r\to 0} r^\alpha e^{\beta i \ln(r) + \gamma i\phi}$ en moet gelden dat $\beta = 0$ (anders bestaat de limiet niet), $\alpha = 0$ (anders kan de limiet niet 1 worden) en $\gamma = 0$ (anders is de limiet niet 1 voor alle waarden van $\phi$). Dus dan hebben we de oplossing $f_1(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{C}$.

Conclusie: We vinden de oplossingen

- $f_1(z) = 0$ voor alle $z$
- $f_1(z) = 1$ voor alle $z$
- $f_1(re^{i\phi}) = r^\alpha e^{i\beta \ln(r) + \gamma i\phi}$ voor $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, $\beta \in \mathbb{R}$ en $\gamma \in \mathbb{Z}$.

(b) Laten we nu gaan kijken naar de $n \times n$ matrices. Net als eerder hebben we $f_n(I_n^2) = f_n(I_n)$ en dus $f_n(I_n) = 1$ of $f_n(I_n) = 0$. Als $f_n(I_n) = 0$ volgt $f_n(A) = f_n(AI_n) = f_n(A)f_n(I_n) = 0$. Derhalve nemen we verder aan dat $f_n(I_n) = 1$.

Dan geldt voor inverteerbare matrices $A$ dat $f_n(A^{-1})f_n(A) = f_n(I_n) = 1$ en dus $f_n(A^{-1}) = 1/f_n(A)$. Dan geldt dat als $A = PBP^{-1}$ geldt $f_n(A) = f_n(PBP^{-1}) = f_n(P)f_n(B)f_n(P^{-1}) = f_n(B)$. In het bijzonder geldt voor diagonaliseerbare matrices $A$ dat $f_n(A)$ gelijk is aan $f_n(D)$ voor de bijbehorende diagonaalmatrix. Verder zien we dat een diagonaalmatrix geschreven kan worden als een product:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{12.1}$$

We schrijven nu $E_\lambda$ voor de eenheidsmatrix met het element in de linkerbovenhoek vervangen door $\lambda$, dus

$$E_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Merk nu op dat de laatste twee matrices in (12.1) gelijkvormig zijn aan $E_{\lambda_2}$, respectievelijk $E_{\lambda_3}$: bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

en dus krijgen we

$$f_n(\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}) = f_n(E_{\lambda_1})f_n(E_{\lambda_2})f_n(E_{\lambda_3})$$

In het algemeen kunnen we dus zeggen dat voor diagonalisserbare matrices $A$ geldt dat $f_n(A)$ het product over de eigenwaarden $\lambda_i$ is van $f_n(E_{\lambda_i})$ met $E_{\lambda_i}$ de diagonaalmatrix met een $\lambda_i$ in de linksbovenhoek en verder 1'en. Nu vormen de matrices $E_z$ met $z \in \mathbb{C}$ een ondergroep van $M_n$ met de geïnduceerde topologie. Derhalve kunnen we ons resultaat over $f_1$ gebruiken in dit geval. Derhalve kennen we dus de mogelijkheden voor diagonaliseerbare matrices.

Voor een niet-diagonaliseerbare matrix merken we op dat ze limieten zijn van diagonaliseerbare matrices. Ze zijn altijd gelijkvormig met een bovendriehoeksmatrix met op de diagonaal de eigenwaarden (met hun algebraïsche multipliciteit). Deze bovendriehoeksmatrices zijn limieten van matrices met op de diagonaal net andere getallen zodat de elementen op de diagonaal allemaal verschillend zijn. Maar als alle diagonaalelementen verschillend zijn, zijn dat eigenwaarden met algebraïsche multipliciteit 1 en dus zijn die licht veranderde matrices diagonaliseerbaar. Al met al zien we dat ook voor niet-diagonaliseerbare matrices geldt dat de functiewaarde gelijk is aan het product van $f_n(E_{\lambda_i})$ voor de eigenwaarden $\lambda_i$ (met algebraïsche multipliciteit geteld).

De conclusie is dat $f_n(A) = f(\det(A))$ voor een functie $f$ die een oplossing is van het probleem voor $1 \times 1$ matrices.