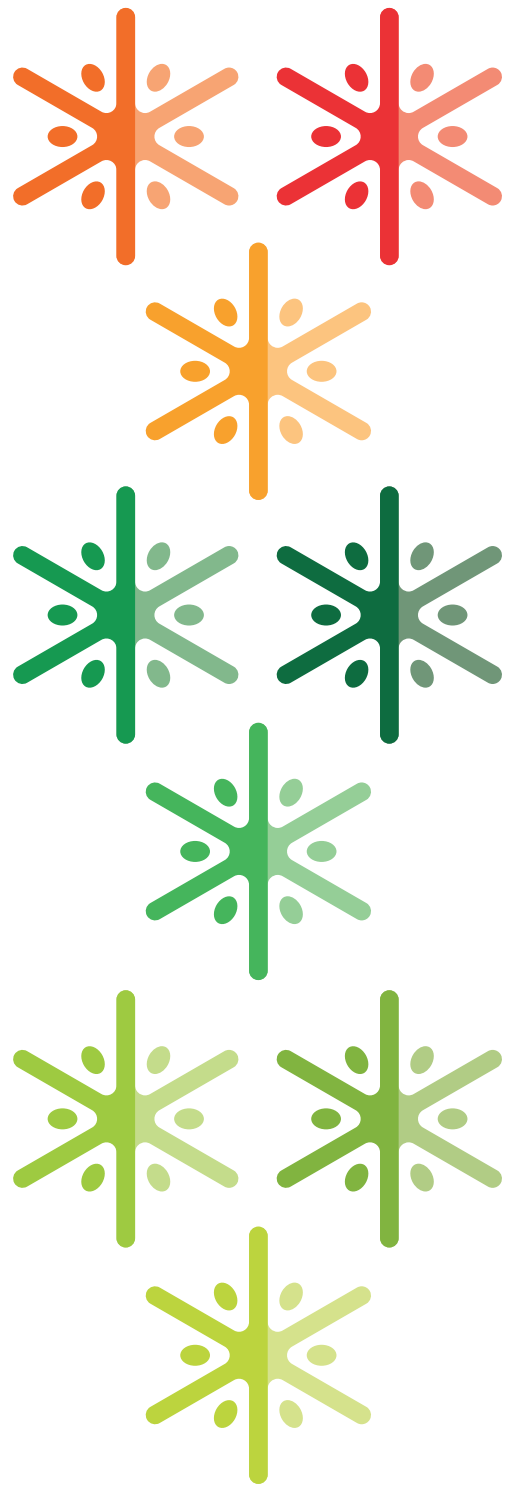




LIMO  
2017



---

Landelijke Interuniversitaire  
Mathematische Olympiade

---

19 mei 2017

Universiteit Nijmegen

---

Opgavenboekje



**Dit opgavenboekje is een uitgave  
van de LIMO-commissie 2017:**

Rian Aarts, Dirk van Bree, Sanne  
Veenstra, Quinten Rutgers, Jeroen Win-  
kel, Ilse Pool, Koen Timmermans.

*E-mail:* [limo@math.ru.nl](mailto:limo@math.ru.nl)

*Website:* [desda.org/limo](http://desda.org/limo)

*Opgaven:* Harold de Boer, Raymond van  
Bommel, Fokko van de Bult, Josse van  
Dobben de Bruyn, Daniël Kroes, Hen-  
drik Lenstra, Julian Lyczak, Leslie Mo-  
lag, Quintijn Puite, Arne Smeets, Merlijn  
Staps.

---

---

## Inhoudsopgave

---

1.	2017-demachten	4
2.	Periodieke rij	5
3.	Lastige limiet	6
4.	Kwadraten	8
5.	$n$ vergelijkingen	9
6.	Stochastische wandeling	11
7.	Een vreemde som	12
8.	LIMO-loterij	14
9.	Doorgespiegelde uitdijingen	15
10.	Bijzondere differentiaalvergelijking	17
11.	Afschatting met verwachting	18
12.	Parallelogram	20

---

## Regels en tips

---

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Verzamel het werk per opgave in het daarvoor bestemde mapje.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Niet-grafische rekenmachines mogen gebruikt worden. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Voor drinken wordt tijdens de wedstrijd gezorgd. Er komt regelmatig iemand langs om vragen aan te kunnen stellen.

**Tips** die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is onderaan schuingedrukt de notatie en/of de terminologie toegelicht. Verder wordt met de natuurlijke getallen de verzameling  $\{1, 2, 3, \dots\}$  bedoeld, die we noteren met  $\mathbb{N}$ .
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven. Besteed dus gemiddeld meer tijd aan opgaven met lagere nummers.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bedenk waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk; vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes.** Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen. Dat kan relevant zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt, kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle  $n \in \mathbb{N}$ , probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor  $n = 1$  of  $n = 2$ . Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.



---

# YOUR CHALLENGE STARTS HERE

FIND OUT IF TRADING OR TECH AT OPTIVER IS THE  
CAREER CHALLENGE YOU'VE BEEN WAITING FOR

[OPTIVER.COM](https://www.optiver.com)

optiver   
CHALLENGES AWAIT

---

**1. 2017-demachten**

*Prof. dr. Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden*

---

Stel dat  $G$  en  $H$  eindige groepen zijn en  $f: G \rightarrow H$ ,  $g: H \rightarrow G$  groepshomomorfismen. Bewijs dat het aantal elementen  $x \in G$  met  $g(f(x^{2017})) = x$  gelijk is aan het aantal elementen  $y \in H$  met  $f(g(y^{2017})) = y$ .

---

## 2. Periodieke rij

*Dr. Arne Smeets, Radboud Universiteit Nijmegen*

---

Zij  $\alpha \in [-1, 1]$ . Definieer de rij  $(x_n)_{n \geq 1}$  door  $x_1 = \alpha$  en  $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$ . Voor welke waarden van  $\alpha$  is deze rij uiteindelijk periodiek?

---

### 3. Lastige limiet

*Josse van Dobben de Bruyn BSc, Universiteit Leiden*

---

Voor iedere  $n \in \mathbb{N}$  definiëren we de functie  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  door

$$f_n(p) := n \left( 1 - \left( \frac{n}{n+1} \right)^p \right).$$

Bewijs dat de rij functies  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  puntsgewijs convergeert en bepaal de limiet. (Met andere woorden: bewijs voor iedere  $p \in \mathbb{R}$  dat de rij  $\{f_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$  convergeert en bepaal de limiet als functie van  $p$ .)

Mocht het je niet lukken om het algemene geval te bewijzen: je kunt maximaal 3 punten verdienen als je dit alleen bewijst voor het geval  $p = -\frac{1}{2}$ .





## Create your tailor-made programme

- Choose from eight different tracks
- Small-scale courses and seminars in a stimulating community
- Prepare for a PhD through the Utrecht Geometry Centre Honours Programme
- Combine Mathematics with Theoretical Physics in an Honours Programme
- Interdisciplinary options with biology, complexity, geology, medicine, physics or education



MASTER  
YOUR  
FUTURE

AT UTRECHT UNIVERSITY

More information:  
[www.uu.nl/masters/mathsci](http://www.uu.nl/masters/mathsci)

---

#### 4. Kwadraten

*Julian Lyczak MSc., Universiteit Leiden*

---

Laat  $a$  en  $b$  twee cijfers zijn ongelijk aan 0 en bekijk de rij getallen

$$\overline{a}, \overline{ab}, \overline{abb}, \overline{abbb}, \dots$$

- a) Bewijs dat er in deze rij eindig veel kwadraten staan.
- b) Wat is het maximale aantal kwadraten dat kan voorkomen?

*Hier staat  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$  voor het decimale getal met cijfers  $a_n, a_{n-1}$  tot en met  $a_0$ , oftewel*

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

---

**5.  $n$  vergelijkingen**

*Dr. Quintijn Puite, Technische Universiteit Eindhoven*

---

Zij gegeven een natuurlijk getal  $n$ . Bekijk het volgende stelsel van  $n$  vergelijkingen in  $n$  reële onbekenden  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= 1 \\x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + \cdots + 2^{n-1}x_n &= 2^{n+1} \\x_1 + 3x_2 + 3^2x_3 + \cdots + 3^{n-1}x_n &= 3^{n+1} \\&\vdots \\x_1 + nx_2 + n^2x_3 + \cdots + n^{n-1}x_n &= n^{n+1}\end{aligned}$$

Bewijs dat dit stelsel een unieke oplossing  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  heeft en bewijs dat

$$x_1 = \frac{1}{2}n(-1)^{n+1}(n+1)!.$$



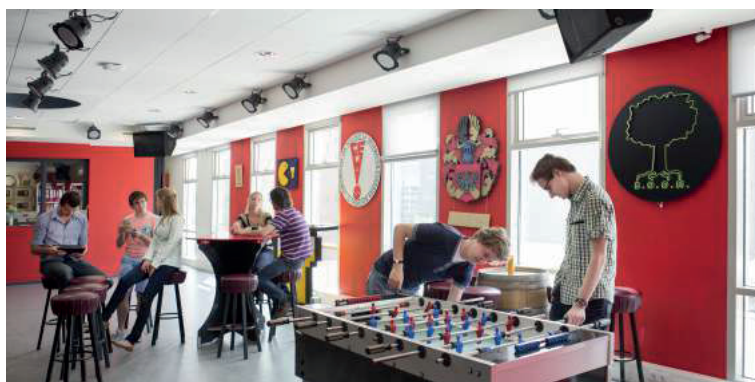
Technische Universiteit  
**Eindhoven**  
University of Technology

Choose a bright future!



## Industrial and Applied Mathematics

- Computational Science and Engineering
- Data Science in Engineering
- Discrete Mathematics and Applications
- Statistics, Probability, and Operations Research



Check [www.tue.nl/graduateprograms/iam](http://www.tue.nl/graduateprograms/iam)

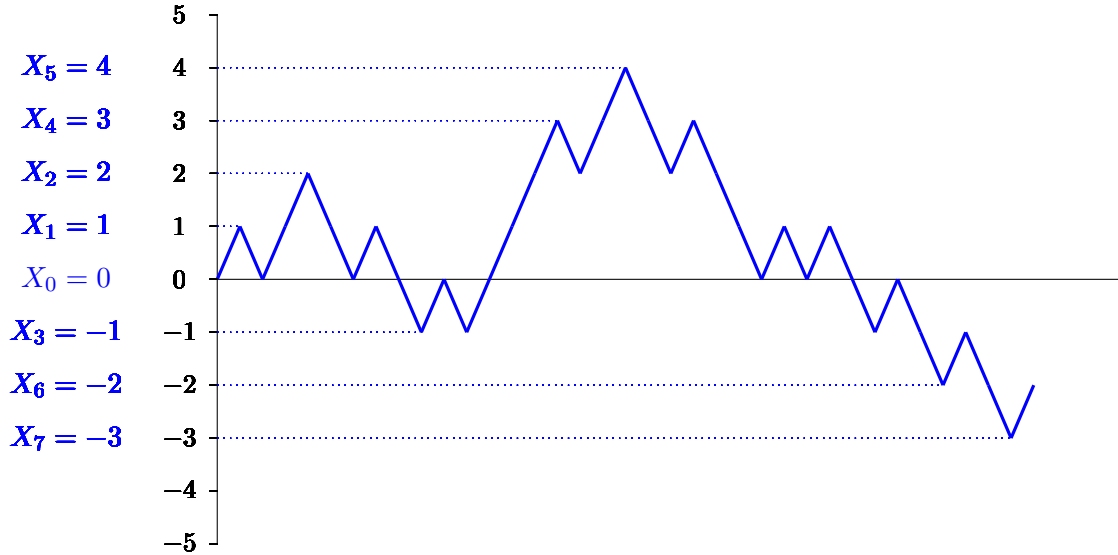
---

## 6. Stochastische wandeling

*Merlijn Staps BSc., Universiteit Utrecht*

---

We bekijken een simpele stochastische wandeling op de gehele getallen. Deze begint in 0 en zet telkens met kans  $\frac{1}{2}$  een stap naar rechts en met kans  $\frac{1}{2}$  een stap naar links (onafhankelijk van eerder gezette stappen). We definiëren  $X_0 = 0$  en voor  $k \geq 1$  definiëren we  $X_k$  als het eerste getal dat de wandeling bereikt dat verschillend is van elk van de getallen  $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}$  (zie figuur).



Bepaal voor ieder natuurlijk getal  $n$  de kansverdeling die  $X_n$  volgt.

*We gaan er hierbij bij de definitie van  $X_k$  vanuit dat de wandeling (uiteindelijk) minstens  $k + 1$  verschillende getallen bereikt; dit gebeurt met kans gelijk aan 1.*

---

## 7. Een vreemde som

*Drs. Raymond van Bommel, Universiteit Leiden*

---

Zij  $n$  een natuurlijk getal en zij  $p$  een priemgetal. Bekijk de verzameling  $\text{Mat}(\mathbb{F}_p, n)$  van alle  $n \times n$ -matrices met coëfficiënten in  $\mathbb{F}_p$ .

a) Bepaal

$$\sum_{A \in \text{Mat}(\mathbb{F}_p, n)} \text{tr}(A) \cdot \det(A) \in \mathbb{F}_p.$$

Beschouw nu een ondergroep  $H$  van de groep  $\text{GL}(\mathbb{F}_p, n)$  van inverteerbare  $n \times n$ -matrices met coëfficiënten in  $\mathbb{F}_p$ . Neem aan dat  $H$  de ondergroep van diagonaalmatrices bevat en dat  $p > 3$ .

b) Bepaal alle mogelijke waarden van

$$\sum_{A \in H} (\text{tr}(A) \cdot \det(A))^2 \in \mathbb{F}_p.$$

## Masteropleiding aan de Radboud Universiteit

Alle bacheloropleidingen van de Radboud Universiteit hebben een bijbehorende master, waar je zonder extra eisen kunt instromen.

Door binnen je bachelor bepaalde keuzevakken te kiezen, kun je soms een andere master van de Radboud Universiteit volgen.

Met het behalen van je masterdiploma mag je je Master of Science (MSc) noemen.

De masteropleiding Mathematics duurt twee jaar en wordt in het Engels aangeboden. In de master specialiseer je jezelf in een bepaald vakgebied en in een aantal vaardigheden. Je maakt een keuze voor een mastertrack die je goed voorbereidt op de arbeidsmarkt.



### **Mastertracks**

Aan de start van je master maak je een keuze voor een mastertrack. Binnen de masteropleiding Mathematics kun je kiezen uit zeven mastertracks. Onderstaande tracks sluiten aan bij het wetenschappelijk onderzoek dat plaatsvindt binnen de Radboud Universiteit en die tot de internationale top behoort. Je kiest voor één van deze tracks als je het leuk vindt om fundamenteel of toegepast onderzoek te doen in de wiskunde. Als onderdeel van je master doe je twee onderzoeksstages onder begeleiding van een wetenschappelijk onderzoeker die ook docent is. Tenminste een onderzoeksstage doe je bij een onderzoeksgroep van de Radboud Universiteit, de tweede stage kun je doen bij een universiteit of bedrijf in binnen- of buitenland. Na je master kun je een vierjarig promotieonderzoek doen aan een universiteit, waarin je je verder specialiseert in het doen van wetenschappelijk onderzoek, of je gaat werken bij bijvoorbeeld een onderzoeksinstituut, een overheidsorganisatie of in het bedrijfsleven.



### **Mastertrack Algebra and Topology**

Er zijn enkele specialismen binnen deze richting die elkaar wederzijds beïnvloeden en inspireren: algebraïsche Meetkunde, algebraïsche topologie, computeralgebra en logica.

### **Mastertrack Mathematical Physics**

De mastertrack Mathematical Physics sluit aan op een bachelor wiskunde met minor natuurkunde (of omgekeerd), en natuurlijk helemaal op een dubbele bachelor natuurkunde en wiskunde.

### **Mastertrack Applied stochastics**

Maatschappelijk richt deze specialisatie zich op zowel de medische wereld als het bedrijfsleven, bv via het onderdeel Statistics in Health en de Statistische Helpdesk van de Radboud universiteit.

[www.ru.nl/master](http://www.ru.nl/master)

---

## 8. LIMO-loterij

*Dr. Arne Smeets, Radboud Universiteit Nijmegen*

---

Op een LIMO-krasbiljet staan de getallen uit  $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ . Bij aankoop van zo'n biljet dien je 10 verschillende getallen uit  $S$  te omcirkelen. Bij de trekking worden 10 verschillende getallen uit  $S$  getrokken. Een winnend biljet is er een met de eigenschap dat geen enkel van de getrokken getallen omcirkeld is. Hoeveel LIMO-biljetten moet je minstens kopen om er zeker van te zijn dat je minstens één winnend biljet hebt?



---

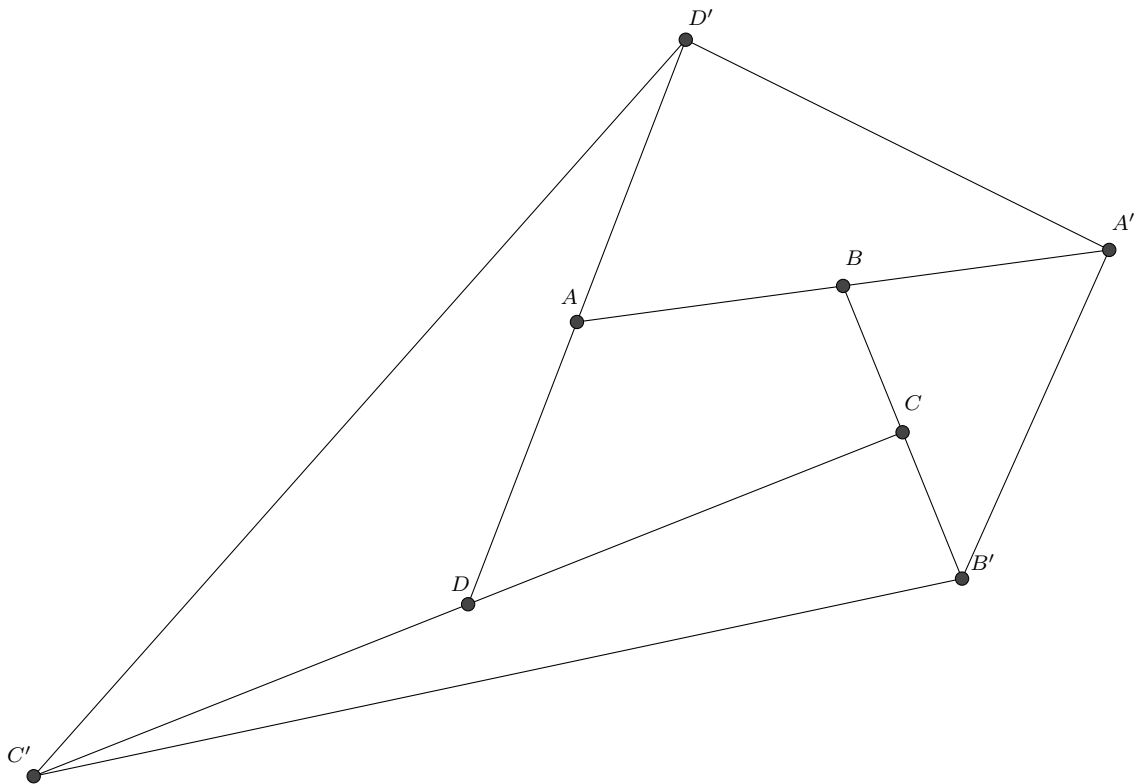
## 9. Doorgespiegelde uitdijingen

*Ir. Harold de Boer, Transtrend BV*

---

Zij  $ABCD$  een convexe vierhoek. Dan definiëren we de doorgespiegelde uitdijing  $ABCD$  door:  $A'$  is  $A$  gepuntspiegeld in  $B$ ;  $B'$  is  $B$  gepuntspiegeld in  $C$ , etc. Zie schets.

- Stel dat  $ABCD$  een rechthoek of een ruit is. Bewijs dat de doorgespiegelde uitdijing een parallellogram is.
- Construeer een parallellogram  $A'B'C'D'$  dat de doorgespiegelde uitdijing is van zowel een rechthoek als van een ruit, waarbij die rechthoek en die ruit niet vierkant zijn; of bewijs dat zo'n parallellogram niet bestaat.



We push  
technology further

to print microchip  
features that are  
finer

to accelerate  
artificial  
intelligence

to make  
robots  
understand  
humans

to let robots help  
in healthcare



Do you dream of changing the world of innovation? Do complex technological challenges appeal to your imagination? We are looking for you. ASML always wants to get in touch with eager and curious students.

Join us at [workingatasmil.com/students](https://www.workingatasmil.com/students)

**ASML**

Be part of progress

---

## 10. Bijzondere differentiaalvergelijking

Leslie Molag MSc., Katholieke Universiteit Leuven

---

Stel dat  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een niet-constante oplossing is van de differentiaalvergelijking  $f''(x) = f(x)^{2017}$ .

- a) Bewijs het bestaan van een continue functie  $F : f(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$  en een  $\lambda > 0$  zodanig dat voor elke  $x \in \mathbb{R}$  geldt dat

$$f'(x) = F(f(x)) \text{ of } f'(x) = -F(f(x)).$$

en bovendien

$$\int_{[\lambda, \infty) \cap f(\mathbb{R})} \frac{dy}{F(y)} < \infty.$$

- b) Bewijs dat er  $a, b, c \in \mathbb{R}$  bestaan zodanig dat  $g(x) = af(bx + c)$  een oplossing is van de differentiaalvergelijking  $g''(x) = g(x)^{2017}$  met  $g(x) \geq \lambda$  en  $g'(x) > 0$  voor alle  $x \geq 0$ .

*Hint: bewijs dat  $f'$  hoogstens één nulpunt kan aannemen.*

*Onderscheid vervolgens de gevallen dat  $f'$  geen of één nulpunt heeft.*

- c) Bewijs dat  $f$  niet bestaat.

**Opmerking:** Je mag het resultaat van (a) gebruiken bij (b) en de resultaten van (a) en (b) bij (c), ook als je die resultaten niet bewezen hebt.

---

## 11. Afschatting met verwachting

*Dr. Fokko van de Bult, Technische Universiteit Delft*

---

Als je met een zuivere munt gooit duurt het gemiddeld  $2n$  worpen voor je voor de  $n$ 'de keer een kop gooit. Intuïtief komt dit omdat je gemiddeld een halve kop per worp gooit en  $2n = n/\frac{1}{2}$ . We gaan in deze opgave hetzelfde probleem bekijken voor algemene processen, en zien of deze intuïtie standhoudt.

Gegeven een rij  $X_i$  van identiek verdeelde, onafhankelijke stochasten met een verdeling die alleen positieve waarden aanneemt (dus  $X_i \geq 0$ ) en met verwachting  $\mu = EX_i > 0$ . We definiëren gerelateerde stochasten  $Y_z$  (voor  $z \in \mathbb{R}_{>0}$ ) als

$$Y_z = \min\{k : \sum_{i=1}^k X_i \geq z\}$$

Dus  $Y_z$  geeft het aantal keer aan dat je uit de verdeling van de  $X_i$  moet trekken totdat de som van de uitkomsten voor het eerst minstens  $z$  is. In het voorbeeld van de muntjes heeft  $X_i$  een Bernoulli verdeling met parameter  $p = \frac{1}{2}$ , en de stochast  $Y_n - n$  (voor vaste gehele  $z = n$ ) een negatief binomiale verdeling met parameters  $n$  en  $\frac{1}{2}$ .

Je mag voor deze opgave aannemen dat  $Y_z$  met kans 1 een eindige waarde aanneemt. Laat zien dat  $EY_z \geq \frac{z}{\mu}$ . Ofwel het verwacht aantal keer dat je moet trekken voor je  $z$  bereikt is minstens  $z$  gedeeld door de gemiddelde waarde van de trekking.

## KEY FACTS

- › Start programme:  
1 Sep/Nov/Feb/Apr
- › Duration: 24 months
- › Language: English
- › Croho code: 66980

## COURSES

- › Dynamical Systems and Chaos
- › Statistical Genomics
- › Geometry & Topology



## GENERAL INFORMATION

How does a bank check whether your digital signature is a valid one? Do the planets move in stable orbits or will they eventually collide? How can you write an algorithm that automatically detects whether an email message is spam? The mathematics behind these questions is dealt within the Master's degree programme in Mathematics.

The Master's degree in Mathematics will provide you with the mathematical knowledge, skills and attitude needed to pursue a professional (research) career. The emphasis is on how to solve a problem by using abstraction and modelling, and to determine whether the problem can be solved by using existing mathematical theory or whether new theory should be developed. During the Master's programme, you will learn to think in a logical, systematic and problem-oriented way. These qualities are highly appreciated by employers.

The programme offers four specialisations:

- › Algebra and Geometry
- › Dynamical Systems and Analysis
- › Statistics and Probability

Within each specialisation you can choose for the variant Science, Business and Policy, which ingetrates insights insights into business, policy and management with your specific scientific discipline, thus preparing you for a variety of jobs in the business world and in policy organisations.

### Career prospects

- › Analyst at bank or insurance company
- › In consultancy branch
- › At R&D department of companies, e.g. Philips or LogicaCMG
- › PhD, starting scientific career

### More information

Programme website

[www.rug.nl/masters/mathematics](http://www.rug.nl/masters/mathematics)

Study advisor

[Academicadvisor.math@rug.nl](mailto:Academicadvisor.math@rug.nl)

Facebook

[/sciencestudentsuniversityofgroningen](https://www.facebook.com/sciencestudentsuniversityofgroningen)

## WHY CHOOSE US

- › For a career in science or a company
- › Acquired skills highly appreciated by employers
- › Informal community, small classes

## Admission

- › Bachelor's degree in Mathematics or Applied Mathematics
- › Special programme available for holders of a relevant academic Bachelor's degree
- › Sufficient English proficiency on VWO level required

Please visit our [website](#) for detailed information

## Application

Contact the study advisor to find out if you meet the admission requirements

You can apply online, please go to [www.rug.studielink.nl](http://www.rug.studielink.nl)

Application deadline Dutch students: 2 months before you start the programme

---

## 12. Parallellogram

Daniël Kroes MSc., University of California, San Diego

---

Laat  $\|\cdot\|$  een norm<sup>1</sup> op  $\mathbb{R}^2$  zijn. Voor  $x \neq y \in \mathbb{R}^2$  definiëren we

$$\ell(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|\}$$

voor de verzameling punten  $z$  waarvoor gelijkheid geldt in de driehoeksongelijkheid.

- Zij  $z$  een punt op de lijn door  $x$  en  $y$ . Bewijs dat  $z \in \ell(x, y)$  dan en slechts dan als  $z$  op het lijnstuk tussen  $x$  en  $y$  ligt.
- Stel dat  $\ell(x, y)$  een punt  $z$  bevat dat niet op de lijn door  $x$  en  $y$  ligt. Bewijs dat de hele driehoek met hoekpunten  $x$ ,  $y$  en  $z$  bevat is in  $\ell(x, y)$ .
- Stel dat  $w$  en  $z$  twee punten in  $\ell(x, y)$  zijn, die niet op de lijn door  $x$  en  $y$  liggen, en aan dezelfde kant van deze lijn liggen. Bewijs dat  $xz$  en  $yw$  snijden in een punt  $s$ , en dat  $s \in \ell(x, y)$ .
- Bewijs dat  $\ell(x, y)$  gelijk is aan een lijnstuk of een parallellogram.

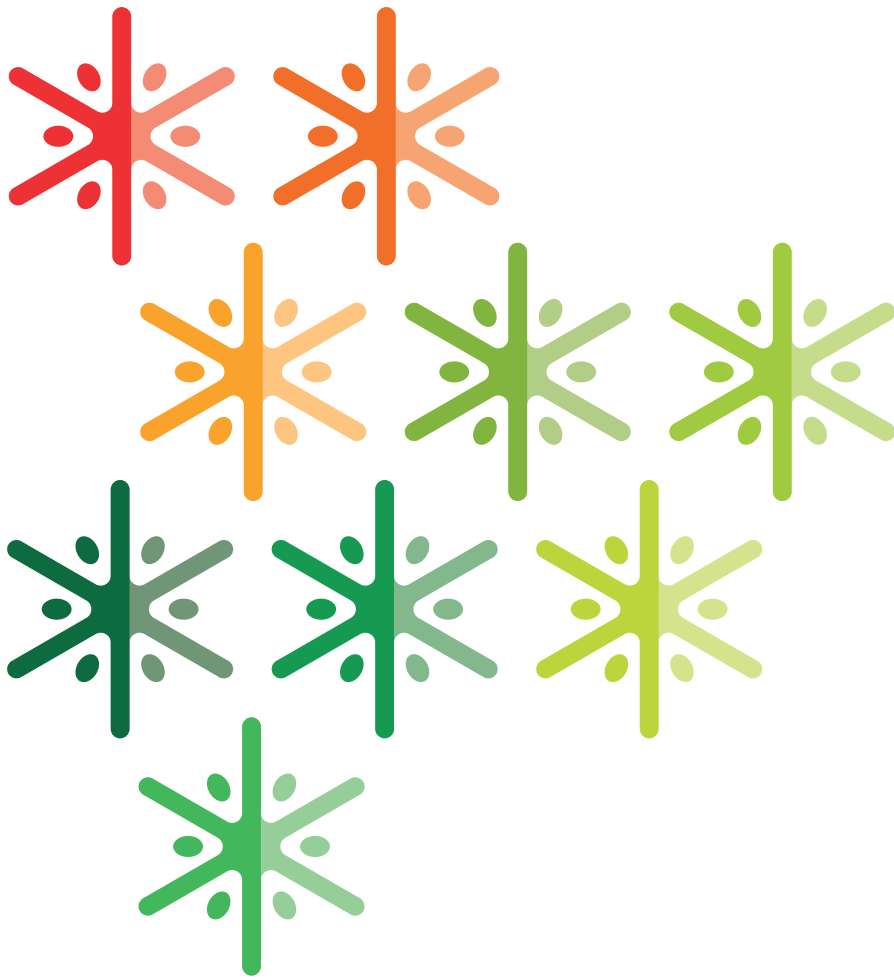
*Hint: je mag gebruiken dat elke norm op  $\mathbb{R}^2$  equivalent is met de Euclidische norm. Specifiek betekent dit dat er reële getallen  $c, C > 0$  zijn zodat voor elke vector  $v = (a, b)$  geldt  $c\sqrt{a^2 + b^2} \leq \|v\| \leq C\sqrt{a^2 + b^2}$ . Met een parallellogram bedoelen we hier het tweedimensionale object bestaande uit de rand samen met het inwendige.*

---

<sup>1</sup>Herinner dat een norm  $\|\cdot\|$  op  $\mathbb{R}^2$  aan elke vector  $v$  in  $\mathbb{R}^2$  een reëel getal  $\|v\|$  toekent, zodanig dat

- $\|v\| \geq 0$  voor alle  $v \in \mathbb{R}^2$ ;
- $\|v\| = 0$  dan en slechts dan als  $v = 0$ ;
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$  als  $\alpha \in \mathbb{R}$  en  $v \in \mathbb{R}^2$ ;
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  voor  $u, v \in \mathbb{R}^2$  (de driehoeksongelijkheid).





# T Transtrend

Radboud University



Universiteit Leiden



Universiteit Utrecht



TU Delft



VRIJE  
UNIVERSITEIT  
AMSTERDAM



Technische Universiteit  
Eindhoven  
University of Technology



KONINKLIJKE  
HOLLANDSCHE MAATSCHAPPIJ  
DER WETENSCHAPPEN



KNAW



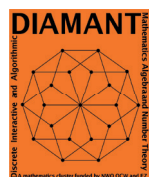
rijksuniversiteit  
 groningen



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

optiver 

ASML



W.S.V. DESDA