1. Drie relaties

Prof. dr. H. W. (Hendrik) Lenstra
Universiteit Leiden

Laat X een eindige verzameling zijn. Als $\sim$ een equivalentierelatie op X is, geven we met $X/\!\sim$ de verzameling equivalentieklassen van $\sim$ aan.
Laten nu $\simeq$ en $\cong$ twee equivalentierelaties op X zijn. Definieer de relatie $\sim$ op X door $x \sim y$ dan en slechts dan als er een eindige rij $x_1, \ldots, x_n$ elementen van X is zodanig dat $x = x_1$, $x_n = y$, $x_i \simeq x_{i+1}$ voor oneven i, en $x_i \cong x_{i+1}$ voor even i. Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie op X is, en dat geldt

$$\#X + \#(X/\!\sim) \geq \#(X/\!\simeq) + \#(X/\!\cong).$$

2. Deelruimteoverdekking

dr. R. (Raymond) van Bommel
Johannes-Gutenberg Universität Mainz

1. **(3 pt)** Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Stel dat $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, waarbij $V_i \subseteq V$ voor elke $i = 1, \ldots, n$ een deelruimte van V is. Bewijs dat er een i is met $V_i = V$.
2. **(4 pt)** Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$. Stel dat $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, waarbij $V_i \subseteq V$ voor elke $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ een deelruimte van V is. Bewijs dat er een i is met $V_i = V$.
3. **(3 pt)** Geldt het resultaat uit onderdeel (2) ook als we de eis dat V eindig-dimensionaal is weglaten?

3. Op zoek naar een functie

P. (Pjotr) Buys MSc.
Universiteit van Amsterdam

We zoeken een differentiëerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan de volgende eisen:

- $f(0) = 0$.
- Er is een $c \in \mathbb{R}_{>0}$ zodat $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$.
- De functie $xf'(x)$ is niet-dalend, dat wil zeggen $xf'(x) \geq yf'(y)$ voor alle reële getallen $x \geq y$.

Bestaat er zo'n functie?

4. Geheeltallige punten

dr. S. R. (Sander) Dahmen
Vrije Universiteit Amsterdam

1. **(2 pt)** Zij $p \geq 3$ een priemgetal, $x \in \mathbb{Z}$ en neem aan dat $p \mid x^2 + 1$. Laat zien dat $p \equiv 1 \pmod 4$.
2. **(8 pt)** Vind alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ zodat
$$x^2 = y^3 + 2y^2 - 4y - 1.$$

5. Met weinig rondkomen

M. (Merlijn) Staps MSc.
Princeton University

Gegeven zijn gehele getallen $a, b > 1$ met $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$. Bepaal het kleinste gehele getal $n > 1$ zodat het mogelijk is om de getallen 1, 2, $\ldots$, n in een cirkel te plaatsen, op zo'n manier dat elke twee getallen die naast elkaar staan a of b van elkaar verschillen.

6. Kirkmans Schoolmeisjesprobleem

S. (Sven) Polak MSc
Universiteit van Amsterdam

In deze vraag bekijken we een variant van een klassiek combinatorisch probleem.[1]

Verdeel 15 meisjes gedurende 7 (week)dagen iedere dag in ten hoogste 5 groepen, zo dat iedere twee meisjes op ten hoogste één dag in dezelfde groep zitten. (6.1)

Hier zie je een voorbeeld van een oplossing voor (6.1).

	Ma	Di	Wo	Do	Vr	Za	Zo
meisje 1	A	A	A	A	A	A	A
meisje 2	A	B	B	B	B	B	B
meisje 3	A	C	C	C	C	C	C
meisje 4	B	A	C	B	D	D	D
meisje 5	B	B	A	C	E	E	E
meisje 6	B	D	D	D	A	C	B
meisje 7	C	A	E	D	C	B	E
meisje 8	C	B	D	E	D	A	C
meisje 9	C	E	B	A	E	C	D
meisje 10	D	C	B	E	A	D	E
meisje 11	D	D	E	C	B	A	D
meisje 12	D	E	D	B	C	E	A
meisje 13	E	C	E	A	D	E	B
meisje 14	E	D	C	E	E	B	A
meisje 15	E	E	A	D	B	D	C

Tabel 1: Een voorbeeld van een oplossing voor (6.1). Iedere dag nummeren we de groepen met `A`, `B`, `C`, `D` en `E`.

(a) **(7 pt)** Bewijs dat in elke oplossing voor (6.1):

i) Iedere twee meisjes op *precies* een dag in dezelfde groep zitten.

ii) Iedere dag iedere groep grootte 3 heeft.

(b) **(3 pt)** Stel dat een oplossing voor (6.1) gegeven is. Het Schoolhoofd arriveert. Op elk van de 7 dagen wordt het Schoolhoofd aan één van de bestaande 5 groepen meisjes toegevoegd, zo dat elk van de 15 meisjes op een *even* aantal dagen in dezelfde groep zit als het Schoolhoofd.

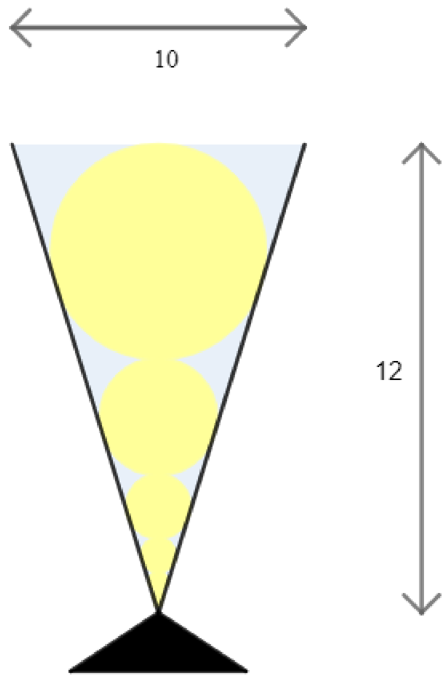
Bewijs dat dit niet kan.

[1] Het oorspronkelijke probleem staat bekend als *Kirkmans schoolmeisjesprobleem*, een vraag gesteld door Thomas P. Kirkman in 1850.

7. LIMOnade ijsbollen

Ir. H. (Harold) de Boer
Transtrend BV

Een kegelvormig LIMOnadeglas met (bovenin) een straal van 5 en een hoogte van 12 is gevuld met ijsbollen. Elke ijsbol raakt het glas rondom. De bovenkant van de bovenste bol zit precies ter hoogte van de bovenkant van het glas. Naar beneden toe zitten oneindig veel steeds kleinere bolletjes.



a) **(3 pt)** Bereken de straal van het bovenste bolletje.

b) **(7 pt)** Welk deel van de inhoud van het glas is gevuld met ijs?

8. Dubbel in de war gegooid

J. (Jan-Willem) van Ittersum MSc
Universiteit Utrecht

Gunther heeft 4038 dozen genummerd van 1 t/m 4038 met in doos i een briefje met daarop het getal i. Vervolgens komt Harry langs die alle nummers in de war gooit op de volgende manier. Hij verwisselt 2019 keer de briefjes uit twee verschillende dozen op zo'n manier dat elk briefje precies één keer verwisseld wordt. Op dit moment is het dus zo dat in doos i een briefje met het getal j zit met $j \neq i$ en in doos j een briefje met het getal i zit. Vervolgens komt Marieke binnen die ook 2019 keer de briefjes uit verschillende dozen verwisselt op zo'n manier dat elk briefje precies één keer verwisseld wordt.
Gunther doet het volgende. Hij opent één van de dozen en bekijkt het getal dat in die doos zit. Vervolgens opent hij de doos met het nummer dat op het briefje staat en bekijkt het getal dat daar in zit. Zo gaat hij door tot hij weer de eerste doos opent. Op een blaadje schrijft hij nu hoeveel dozen hij heeft geopend. De geopende dozen gooit hij weg en daarna begint hij weer van vooraf aan. Zo gaat hij door tot hij alle dozen heeft weggegooid. Op dat moment staan er een aantal getallen met som 4038 op zijn briefje.

a) **(5 pt)** Bewijs dat elk getal op Gunthers briefje een even keer voorkomt.

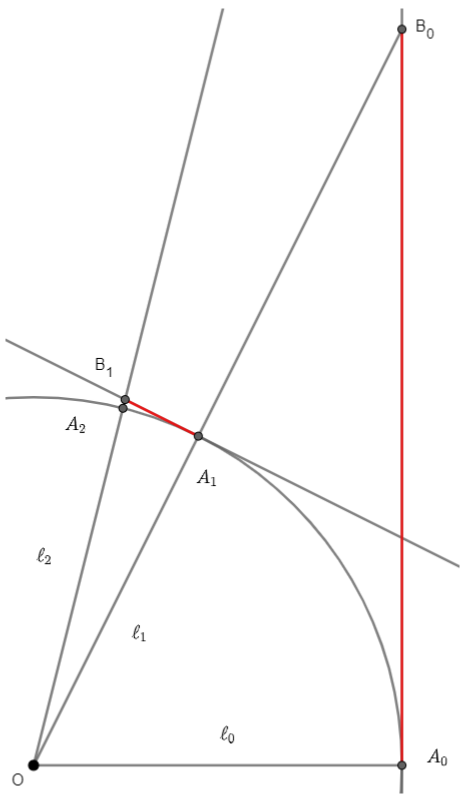
Zij $a_1, \ldots, a_m$ een aantal positieve gehele getallen met $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 2019$.

b) **(5 pt)** Bewijs dat Marieke er voor kan zorgen dat op Gunthers briefje precies twee keer de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ staan.

9. De verborgen kracht van de raaklijn

drs. S. (Stijn) Cambie
Radboud Universiteit Nijmegen

We schrijven Ω voor de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$. Voor alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, teken de rechte ℓ_k door de oorsprong met richtingscoëfficiënt $2k$. Dus ℓ_k is de lijn in $\mathbb{R}^2$ gegeven door de vergelijking $y = 2kx$. Het snijpunt van ℓ_k en Ω in $\mathbb{R}^2_{>0}$ noemen we A_k. De raaklijn aan Ω door A_k snijd ℓ_{k+1} in een punt B_k. Zie bijbehorende schets voor $k = 0, 1$.



Bepaal de waarde van

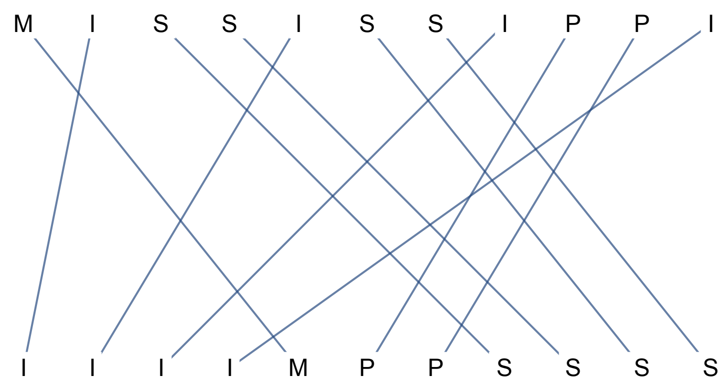
$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k B_k|$$

waar $|AB|$ de lengte van het lijnstuk tussen de punten A en B aangeeft.

10. Overschot

dr. T. (Tom) Verhoeff
Technische Universiteit Eindhoven

Beschouw het woord MISSISSIPPI. Deze letters kunnen in veel verschillende volgordes gepermuteerd worden, bijvoorbeeld in alfabetische volgorde: IIIIMPPSSSS.
Een *inversie* in zo'n permutatie is een paar van verschillende letters dat niet in alfabetische volgorde staat. We noemen een permutatie *even* als deze een even aantal inversies bevat, en anders noemen we hem *oneven*.
Een simpele manier om het aantal inversies te bepalen is als volgt: schrijf de letters van de gegeven permutatie naast elkaar. Schrijf daaronder de letters in alfabetische volgorde. Trek vervolgens een lijn tussen alle corresponderende letters. Dan is er een bijectie tussen de inversie en de snijdende lijnen in het diagram. De inversies van het woord MISSISSIPPI



Figuur 10.1: Inversies in het woord MISSISSIPPI

kunnen bijvoorbeeld geteld worden als snijdende lijnen in Figuur 10.1. Dus MISSISSIPPI heeft 24 inversies, en is even.

1. **(4 pt)** Beschouw de verzamelingen van even en oneven permutaties van het woord RARARA. Welke is groter, en wat is het verschil in grootte?

2. **(6 pt)** Zelfde vraag, maar nu voor het woord MISSISSIPPI.

Motiveer je antwoorden.

11. Kleuringen vergelijken

dr. V. S. (Viresh) Patel
Universiteit van Amsterdam

Een graaf $G = (V, E)$ is d-regulier als elke knoop v precies d buren heeft. We zeggen dat $f : V \to \{1, \dots, k\}$ een geldige k-kleuring is als voor elke $uv \in E$, $f(u) \neq f(v)$. We schrijven K_r voor de volledige graaf op r knopen (dus met alle $\binom{r}{2}$ lijnen). We schrijven sK_r voor de graaf met sr knopen die de disjuncte vereniging is van s kopieën van K_r.
Zij $k \geq d + 1$ vast. Laat zien dat elke d-reguliere graaf op $s(d + 1)$ knopen ten minste zoveel k-kleuringen heeft als sK_{d+1}.

12. Oneindige stochastische sommen

S. H. A. (Stan) Tendijck MSc
Lancaster University, United Kingdom

Het is een bekend feit dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Dus als we $1/n$ sommeren over een deelverzameling van $\mathbb{N}$ dan is het mogelijk dat de som eindig wordt. Een interessante generalisatie is te kijken naar een willekeurig gekozen verzameling van $\mathbb{N}$. Dus in plaats van te sommeren over een vaste deelverzameling van $\mathbb{N}$, laten we de deelverzameling bepaald worden door een rij stochasten X_n.
Kies $p \in [0,1]$ vast. We stellen dat $X_n \sim \text{Bin}(n+1, p)$, dus

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}.$$

Zij $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid 2X_n = n+1\}$ de verzameling van n waarvoor X_n gelijk is aan zijn verwachting indien p gelijk was aan $\frac{1}{2}$. We definiëren de stochastische variabele

$$S = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{n}.$$

Bepaal of S eindig is met kans 1, en bereken $\mathbb{E}[S]$.