LIMO 2020

OPGAVEN BOEKJE

transtrend

Utrecht University

A - E s k w
a d r a a t

Dit opgavenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2020:
Ludo Dekker, Lizanne van der Laan, Jorke de Vlas, Jasper Oostlander, Stein Meereboer, Rinske Oskamp en Mieke Wessel
e-mail: `limo2020@a-eskwadraat.nl`
website: `limo2020.a-eskwadraat.nl`
Opgaven: T. Verhoeff, H. de Boer, J. de Vlas, M. Daas, M. Wessel, M. Staps, H. Smit, M. Caspers en S. Cambie

Regels en tips

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Je zal tot vier uur de mogelijkheid hebben om te werken aan de opgaven. Vervolgens heb je tot half vijf om je uitwerkingen te mailen naar limo2020@a-eskwadraat.nl. Maak hiervoor een scan of foto van de uitwerkingen.

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie alle vellen van teamnaam en opgavenummer. Nummer je pagina's (1/2, 2/2).

- Hulpmiddelen zoals boeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Laptops en telefoons zijn uitsluitend toegestaan voor communicatie met teamgenoten en met de organisatie. Definities en stellingen mogen dus niet worden opgezocht.

- Als jullie vragen over de wedstrijd/opgaven hebben tijdens de wedstrijd, stuur dan een mailtje naar limo2020@a-eskwadraat.nl.

Tips die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is onderaan schuingedrukt de notatie en/of de terminologie toegelicht. Verder wordt met de natuurlijke getallen de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots\}$ bedoeld, die we noteren met $\mathbb{N}$.

- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat de eerste opgaven gemiddeld door meer mensen opgelost zullen worden dan de latere opgaven.

- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.

- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bedenk waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk; vaak kan een ander er nog wat foutjes uit te halen.

- **Sprokkel puntjes**. Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen. Dat kan relevant zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, zijn daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat voor een opgave vaak niet alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.

- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt, kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.

- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}$, probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor $n = 1$ of $n = 2$. Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.

- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

Inhoudsopgave

1. Sommen met kwadraten

dr. T. (Tom) Verhoeff
Technische Universiteit Eindhoven

Op maandag 10 februari jl. vestigde rekenwonder Willem Bouman (1939) aan de TU Eindhoven een nieuw wereldrecord. Daarvoor moest hij elk van tien 5-cijferige getallen (willekeurig door de jury gekozen) schrijven als som van vier kwadraten. Hij mocht alleen naar de getallen kijken en dan zijn antwoord opschrijven (en daarna niet meer controleren of verbeteren). Alles moest uit het hoofd. Dat lukte (en zelfs binnen vijf minuten).

Het is goed om te weten dat volgens de *vier-kwadratenstelling* van Lagrange uit 1770 elk natuurlijk getal te schrijven is als som van vier kwadraten. Willem kon er dus niet 'ingeluisd' worden. Ook is het goed te weten dat niet elk natuurlijk getal te schrijven is als som van drie kwadraten (bijv. 7). De *drie-kwadratenstelling* van Legendre uit 1798 maakt dit precies: een getal n is *niet* te schrijven als som van drie kwadraten dan en slechts dan als

$$\underset{k,m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}{\exists} \quad n = 4^k(8m+7)$$

We weten niet precies hoe Willem te werk gaat. Er zijn meestal veel oplossingen mogelijk, en hij hoeft er slechts één te vinden. Het volgende kan hem helpen.

Laat $n, r \in \mathbb{N}$ waarbij $r^2 \leq n < (r+1)^2$.

a) **(6 punten)** Bewijs dat, als n niet deelbaar is door 8, er $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ bestaan met

$$n = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2$$

waarbij $n_4 = r$ of $n_4 = r - 1$.

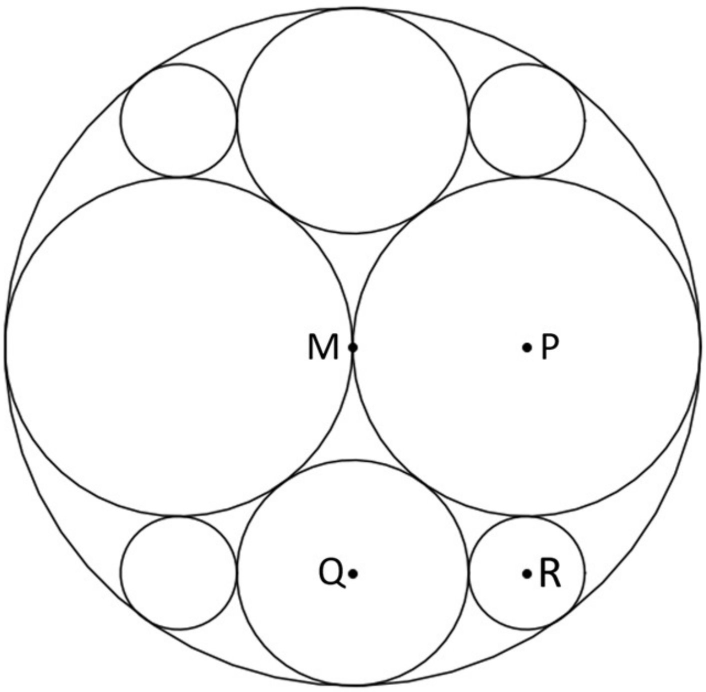
b) **(4 punten)** Geef twee $n \in \mathbb{N}$ waarvoor $n - r^2$ en $n - (r-1)^2$ beide niet te schrijven zijn als som van drie kwadraten. Schrijf deze n bovendien als som van vier kwadraten.

2. Cirkelbedekking

Ir. H. (Harold) de Boer
Transtrend BV

In het plaatje zie je een cirkel met middelpunt M. Binnen deze cirkel liggen 8 kleinere cirkels die allemaal de grote cirkel raken. De beide grootste raken elkaar in M. Het middelpunt van de rechter van deze cirkels noemen we P. Boven en onder deze 2 cirkels liggen 2 zo groot mogelijke cirkels, zodanig dat ze de beide andere cirkels niet overlappen. Het middelpunt van de onderste van deze cirkels noemen we Q. De 4 overige cirkels zijn de grootst mogelijke cirkels binnen de grote cirkel die de eerder gedefinieerde 4 cirkels niet overlappen. Het middelpunt van de cirkel rechtsonder noemen we R.

Is de vierhoek $MPRQ$ een rechthoek? Bewijs je antwoord.



3. Flowrelatie

J. (Jorke) de Vlas, BSc.
Universiteit Utrecht

Een *ongerichte graaf* G bestaat uit een eindige verzameling V (de *knopen*) en een eindige verzameling E bestaande uit paren knopen (de *kanten*). Twee knopen kunnen door meerdere kanten verbonden zijn, en een kant kan twee dezelfde knopen verbinden.
Voor twee knopen $v, w \in V$ definiëren we een *pad van* v *naar* w als een rij verschillende kanten $\{e_1, e_2, \ldots, e_\ell\}$ en een rij knopen $\{v_0, v_1, \ldots, v_\ell\}$ waarbij geldt dat $v_0 = v$, $v_\ell = w$ en dat voor elke $i \leq \ell$ de kant e_i de knopen v_{i-1} en v_i verbindt. Twee paden zijn *kant-disjunct* als de verzameling kanten disjunct is.
Merk op dat het lege pad, bestaande uit een enkele knoop en een lege verzameling kanten, kant-disjunct met zichzelf is. Merk ook op dat de verzameling knopen niet per se verschillend hoeft te zijn.

Laat nu een ongerichte graaf $G = (V, E)$ en een natuurlijk getal k gegeven zijn. We definiëren op V een relatie R_k waarbij $vR_kw \in R_k$ als er minstens k paarsgewijs kant-disjuncte paden van v naar w bestaan. Laat zien dat R_k voor elke $k \in \mathbb{N}$ een equivalentierelatie is.

Een relatie R op een verzameling V heet een equivalentierelatie als aan de volgende drie eisen wordt voldaan:

(i) *voor elke $v \in V$ geldt dat $vRv \in R$*

(ii) *voor elke $v, w \in V$ geldt dat $vRw \in R$ dan en slechts dan als $wRv \in R$*

(iii) *voor elke $v, w, x \in V$ geldt dat $vRw \in R$ en $wRx \in R$ impliceert dat $vRx \in R$*

4. Ongelijkheid met twee parameters

M. (Mike) Daas, BSc.
Universiteit van Amsterdam

Vind alle paren reële getallen (a, b) waarvoor de ongelijkheid

$$xy(x + y) + ab \geq bxy + a(x + y)$$

geldt voor alle reële $x, y \geq 1$.

5. Recursieve priemgetallen

M. (Mieke) Wessel, BSc.
Universiteit Utrecht

Laat m, n en p_0 drie getallen in $\mathbb{N}$ en zij $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ een rijtje dat wordt gedefinieerd door de recursieve formule $p_{i+1} = mp_i - n$.

a) **(2 punten)** Stel $m = 2$ en $n = 3$. Vind twee priemgetallen als waardes voor p_0, eentje zodat $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uit alleen maar priemgetallen bestaat en eentje zodat dit niet zo is.

b) **(8 punten)** Stel p_0 is bekend. Voor welke tweetallen (m, n) bevat het rijtje $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ alleen maar priemgetallen? Bewijs ook dat het niet goed gaat voor andere tweetallen (m, n).

Hierbij is $\mathbb{N}$ gedefineerd als de positieve getallen *zonder* 0.

6. Correlatieconsternatie

H. J. (Harry) Smit, MSc. en M. (Merlijn) Staps, MSc.
Universiteit Utrecht & Princeton University

Bekijk de volgende bewering: "Voor iedere toevalsvariabele X met positieve variantie bestaan er toevalsvariabelen Y en Z, zodat Y en Z allebei dezelfde verdeling hebben als X, en zodat de correlatie tussen Y en Z gelijk is aan ρ."

a) **(5 punten)** Is deze bewering waar voor $\rho = \frac{1}{2}$?

b) **(5 punten)** Is deze bewering waar voor $\rho = -\frac{1}{2}$?

Toelichting: De *correlatie* $\operatorname{cor}(A, B)$ tussen twee toevalsvariabelen A en B met $\operatorname{Var}(A) > 0$ en $\operatorname{Var}(B) > 0$ is gedefinieerd als

$$\operatorname{cor}(A, B) = \frac{\operatorname{cov}(A, B)}{\sqrt{\operatorname{Var}(A)\operatorname{Var}(B)}} = \frac{\mathbb{E}[AB] - \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B]}{\sqrt{\operatorname{Var}(A)\operatorname{Var}(B)}}.$$

Je mag bij deze opgave eventueel voor het gemak aannemen dat $\mathbb{E}[X] = 0$ en $\operatorname{Var}(X) = 1$, zodat $\operatorname{cor}(Y, Z) = \mathbb{E}[YZ]$.

7. Periodieke punten op een cirkel

dr. M. (Martijn) Caspers
Technische Universiteit Delft

Zij $f : X \to X$ een functie op een verzameling X. Een punt $x \in X$ heet periodiek als er een $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ bestaat zodanig dat $f^n(x) = x$ waar, $f^n(x) = f(f(\ldots f(x)\ldots))$ (de n-voudige samenstelling van f met zichzelf). De kleinste n met deze eigenschap heet de orde van x.

Zij S^1 de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$ en zij $f : S^1 \to S^1$ een continue functie. Veronderstel dat f een periodiek punt heeft van orde 3, maar geen periodiek punt heeft van orde 2. Laat zien dat f surjectief is.

8. Meer, meest, metro

drs. S. (Stijn) Cambie
Radboud Universiteit Nijmegen

In een stad hebben we 60 metrostations $1, 2, \ldots, 60$, waarbij er rechtstreekse verbindingen $C_{i,j}$ zijn tussen bepaalde stations $i < j$. Op zo'n verbinding, rijden de metro's in beide richtingen. Een traject (rit tussen twee metrostations) kost één euro. Zij a_i het aantal stations naar waar men kan reizen vanaf station i voor exact één euro (station i dus niet inbegrepen). Voor elke verbinding $C_{i,j}$, zij $L_{i,j}$ het aantal stations dat (strikt) goedkoper te bereiken is vanaf station i dan vanaf station j. Merk op dat station i zelf zo een station is. Analoog noemen we voor elke verbinding $C_{i,j}$, $H_{i,j}$ het aantal stations waarvoor het (strikt) duurder is om deze te bereiken vanaf station i dan vanaf station j. Hier is station j een voorbeeld van.

Wat is de maximale waarde van

$$\sum_{C_{i,j} \in E} (a_i + a_j) \cdot L_{i,j} \cdot H_{i,j}$$

waar E de verzameling is van alle metroverbindingen?