LIMO 2021

OPGAVEN BOEKJE

optiver

DIAMANT

Discrete, Interactive and Algorithmic Mathematics, Algebra and Number Theory

KWG

transtrend

ASML

TU/e EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

university of groningen

Utrecht University

FLOW TRADERS

Dit opgavenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2021:
Ludo Dekker, Lizanne van der Laan, Jorke de Vlas, Jasper Oostlander, Stein Meereboer, Rinske Oskamp en Mieke Wessel
e-mail: `limo2020@a-eskwadraat.nl`
website: `limo.a-eskwadraat.nl`
Opgaven: J. Ittersum, R. van Bommel, F. van der Bult, I. Kryven, R. Versendaal, H. Smit, M. Staps, M. Daas, H. de Boer, H. Lenstra, M. Kool, S. Cambie, J. Top en D. Gijswijt.

Regels en tips

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Je zal tot 16:00 de mogelijkheid hebben om te werken aan de opgaven. Vervolgens heb je tot 16:30 om je uitwerkingen via Google Forms in te leveren. Maak hiervoor een scan of foto van de uitwerkingen en zorg dat je per opgave één PDF bestand inlevert.
- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie alle vellen van teamnaam en opgavenummer. Nummer je pagina's (1/2, 2/2).
- Hulpmiddelen zoals boeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Laptops en telefoons zijn uitsluitend toegestaan voor communicatie met teamgenoten en met de organisatie. Definities en stellingen mogen dus niet worden opgezocht.
- Als jullie vragen over de wedstrijd/opgaven hebben tijdens de wedstrijd, stuur dan een mailtje naar limo2020@a-eskwadraat.nl.

Tips die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is onderaan schuingedrukt de notatie en/of de terminologie toegelicht. Verder wordt met de natuurlijke getallen de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots\}$ bedoeld, die we noteren met $\mathbb{N}$.
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat de eerste opgaven gemiddeld door meer mensen opgelost zullen worden dan de latere opgaven.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bedenk waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk; vaak kan een ander er nog wat foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes**. Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen. Dat kan relevant zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, zijn daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat voor een opgave vaak niet alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt, kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}$, probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor $n = 1$ of $n = 2$. Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.

- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

Inhoudsopgave

1. Functies met bepaalde symmetriën

J.W. (Jan-Willem) M. van Ittersum, MSc.
Universiteit Utrecht

De sinusfunctie is een periodieke functie, i.e.,

$$\sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x),$$

en het polynoom in $\frac{1}{x}$ gegeven door $\varphi(x) = x^{-2021} + 1$ is een voorbeeld van een functie die voldoet aan

$$\varphi(x) = x^{-2021}\varphi\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

In deze opgave gaan we op zoek naar functies f die deze twee eigenschappen combineren, dat wil zeggen, functies waarvoor

(i) $f(x) = f(x+1)$;

(ii) $f(x) = x^{-2021} f\left(\frac{1}{x}\right)$ voor alle $x \neq 0$.

a) Laat zien dat er een *niet-constante* functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat die voldoet aan eigenschappen (i) en (ii) voor alle $x \in \Gamma$.

b) Laat zien dat er geen *continue* niet-constante functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat die voldoet aan eigenschappen (i) en (ii) voor alle $x \in \Gamma$.

Zij $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$. We construeren een niet-constante continue periodieke functie $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die ook aan de tweede eigenschap voldoet, als volgt:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{((8m+5)z + (8n+5))^{2021}}.$$

Je mag zonder bewijs gebruiken dat deze dubbele som absoluut convergeert voor $z \in \mathfrak{h}$: de waarde van deze dubbele som hangt dus niet af van de volgorde van sommatie.

c) Bewijs dat $f(z) = f(z+8)$ en $f(z) = z^{-2021} f\left(\frac{1}{z}\right)$ voor alle $z \in \mathfrak{h}$.[1]

[1] Functies zoals in deel (c) heten modulaire vormen. Ze spelen een belangrijke rol in het bewijs van *de laatste stelling van Fermat*, evenals bij het *bolpakkingsprobleem* in dimensie 8 en 24.

2. Surjectieve polynomen

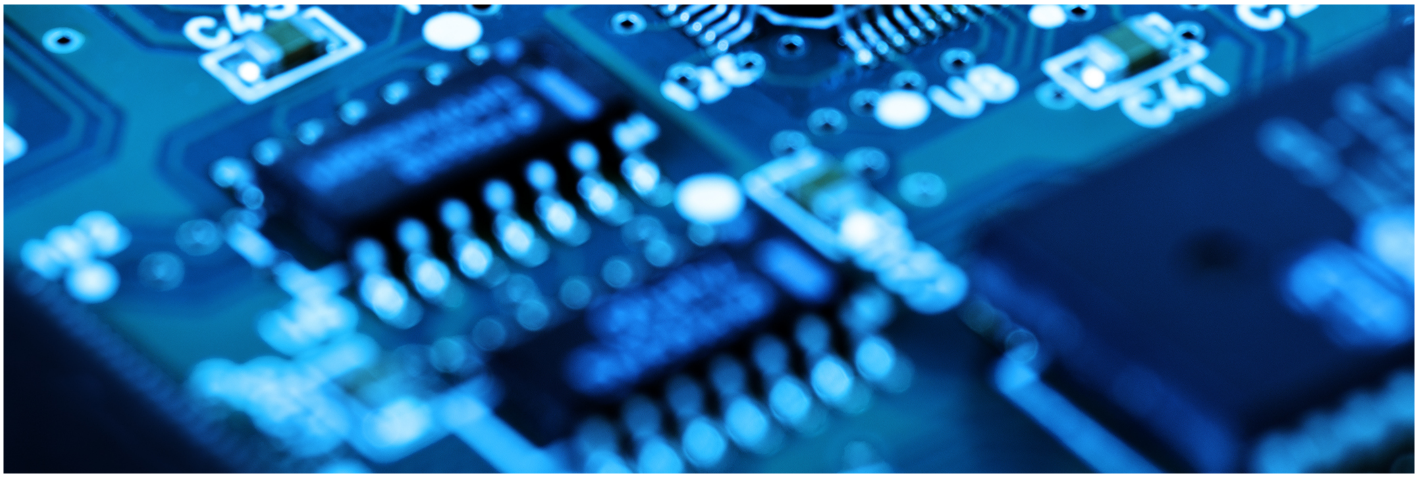
dr. R. (Raymond) van Bommel
Massachusetts Institute of Technology

a) Bestaat er een polynoom $P \in \mathbb{Q}[x]$ zodanig dat de functie $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\colon x \mapsto P(x)$ surjectief is en $\deg P > 1$?

b) Voor welke priemgetallen p bestaat er een polynoom $P \in \mathbb{Z}[x]$ zodanig dat de functie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\colon x \mapsto P(x) \bmod p$ surjectief is en $\deg P > 1$?

c) Bestaat er een polynoom $P \in \mathbb{Z}[x]$ met $\deg P > 1$, zodanig dat de functie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\colon x \mapsto P(x) \bmod p$ surjectief is voor oneindig veel priemgetallen p?

d) Bestaat er een polynoom $P \in \mathbb{Z}[x]$ met $\deg P > 1$, zodanig dat de functie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\colon x \mapsto P(x) \bmod p$ surjectief is voor alle priemgetallen p?



ASML is a high-tech company, headquartered in the Netherlands. We manufacture the complex lithography machines that chipmakers use to produce integrated circuits, or computer chips. Over 30 years, we have grown from a small startup into a multinational company with over 60 locations in 16 countries and annual net sales of €11.8 billion in 2019.

Behind ASML's innovations are engineers who think ahead. The people who work at our company include some of the most creative minds in physics, electrical engineering, mathematics, chemistry, mechatronics, optics, mechanical engineering, computer science and software engineering.

Because ASML spends more than €2 billion per year on R&D, our teams have the freedom, support and resources to experiment, test and push the boundaries of technology. They work in close-knit, multidisciplinary teams, listening to and learning from each other.

If you are passionate about technology and want to be a part of progress, visit www.asml.com/careers.

3. Een quadrant vierhoeken

Dr. F. (Fokko) J. van de Bult
Technische Universiteit Delft

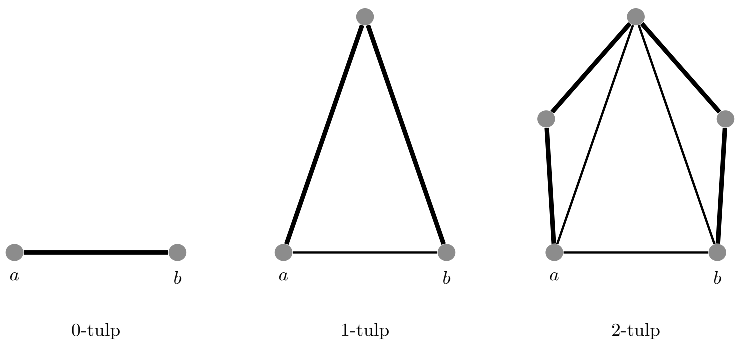
Beschouw een convexe vierhoek $ABCD$ die geen twee parallele zijden heeft. We definiëren bij deze vierhoek vier parallellogrammen. Dit doen we door steeds één hoekpunt weg te laten, en een parallelogram te maken met de drie overige hoekpunten, waarbij twee zijdes overeenkomen met zijdes van de oorspronkelijke vierhoek $ABCD$.

Bijvoorbeeld als $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 1)$ en $D = (3, 5)$, dan heeft het parallellogram behorende bij driehoek ABC als vierde hoekpunt $D' = (1, 1)$.

Laat zien dat precies één van deze vier parallellogrammen volledig bevat is binnen de oorspronkelijke vierhoek $ABCD$.

4. Gefranjerde tulp

dr. ir. Rik Versendaal en dr. Ivan Kryven,
Universiteit Utrecht



Een n-tulp is de volgende iteratieve constructie: Een 0-tulp bestaat uit twee punten a en b verbonden met een lijn. Iteratief maken we een $(n+1)$-tulp van een n-tulp door aan iedere nieuwe lijn uit de vorige iteratie een driehoek te plakken.

Een gefranjerde n-tulp is een n-tulp waarvan elke lijn verwijderd wordt met kans $1-p$. We zeggen dat a en b verbonden zijn met een pad, als er ten minste een manier is om van a naar b te gaan gebruik makend van de lijnen. We zijn geïnteresseerd in $f_n(p)$, de kans dat er een pad is van a naar b in een gefranjerde n-tulp. Merk op dat per definitie $f_0(p) = p$, omdat het enige pad van a naar b de lijn (a,b) zelf is.

Laat zien dat:

a) $f_n \in C^\infty(0,1)$ voor $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $f_n(p)$ convergeert voor alle $p \in (0,1)$.

Laat $F : (0,1) \to [0,1]$ gedefinieerd zijn door $F(p) := \lim_{n\to\infty} f_n(p)$. Laat zien dat:

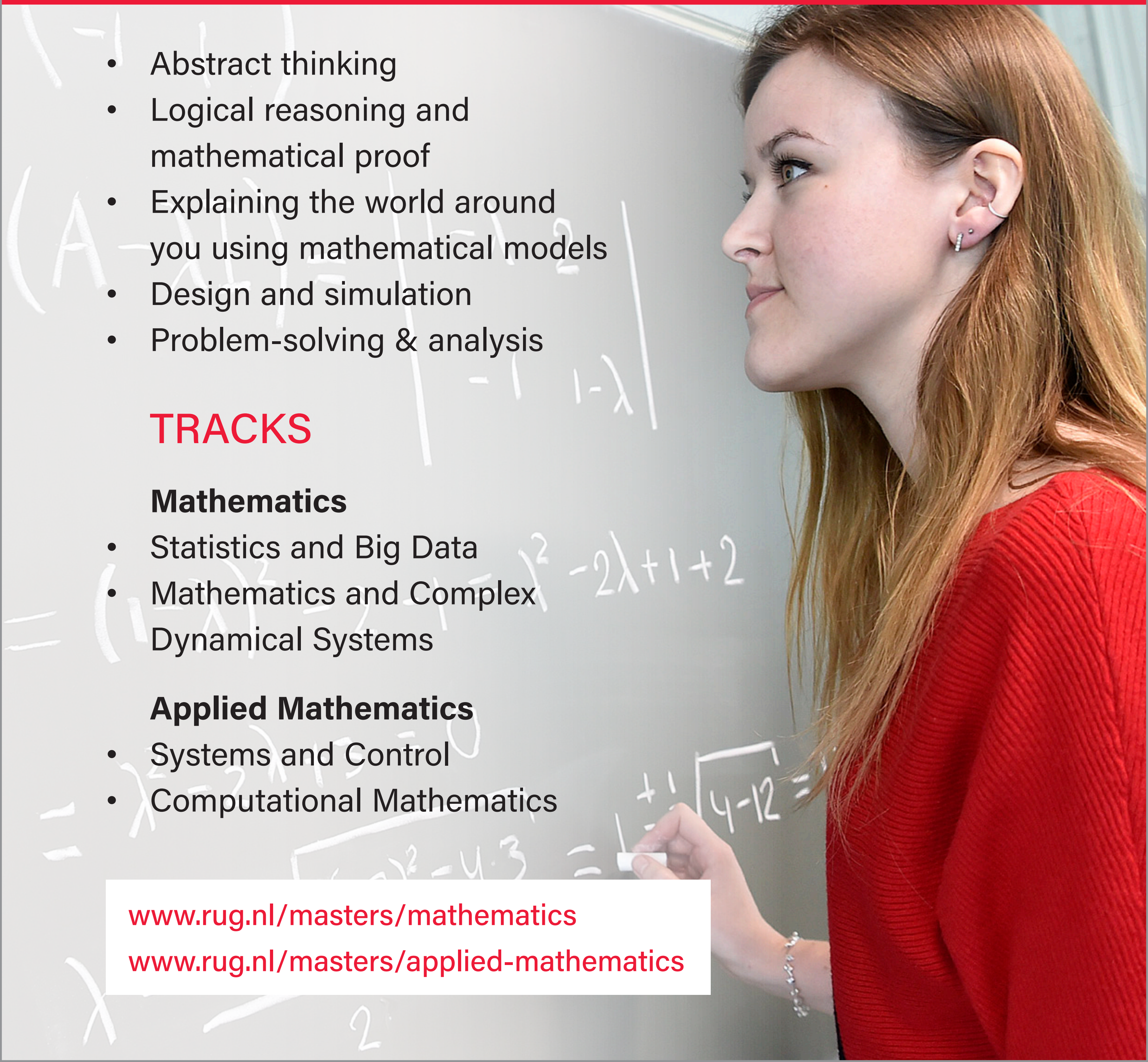
c) $F \in C^0(0,1)$ and $F \notin C^1(0,1)$.

university of groningen

faculty of science and engineering

International Master's degree programme in

• Mathematics
• Applied Mathematics



- Abstract thinking
- Logical reasoning and mathematical proof
- Explaining the world around you using mathematical models
- Design and simulation
- Problem-solving & analysis

TRACKS

Mathematics

- Statistics and Big Data
- Mathematics and Complex Dynamical Systems

Applied Mathematics

- Systems and Control
- Computational Mathematics

www.rug.nl/masters/mathematics

www.rug.nl/masters/applied-mathematics

5. Voor 0 komt de som op

dr. H. J. (Harry) Smit en M. (Merlijn) Staps, MSc.
Max Planck Institute Bonn & Princeton University

Waar bij de LIMO de opgaven elk jaar anders zijn, bekijken we in deze opgave juist verzamelingen waarvan alle sommen hetzelfde zijn.
Stel dat we een aantal rode en blauwe kaarten hebben met op elke kaart een geheel getal, zodat voor elk geheel getal k geldt dat het aantal manieren om een aantal rode kaarten uit te kiezen met som k gelijk is aan het aantal manieren om een aantal blauwe kaarten uit te kiezen met som k.

a) Bewijs dat als op de kaarten alleen positieve getallen voorkomen, er geldt dat er voor elk positief geheel getal ℓ precies evenveel rode kaarten zijn met ℓ erop als blauwe kaarten met ℓ erop.

b) Bewijs dat als op de kaarten ook negatieve getallen mogen voorkomen, geldt dat er voor elk positief geheel getal ℓ evenveel rode kaarten zijn met ℓ of $-\ell$ erop als blauwe kaarten met ℓ of $-\ell$ erop.

c) Bewijs dat als de rode en blauwe kaarten niet precies dezelfde getallen bevatten (dat is, niet voor ieder geheel getal ℓ geldt dat er evenveel rode kaarten zijn met ℓ erop als blauwe kaarten met ℓ erop), we een positief aantal rode kaarten kunnen uitkiezen zodat de som van de getallen op deze kaarten gelijk is aan 0.

Bij deze opgave mag je bij elk onderdeel de vorige onderdelen gebruiken, ook als je die nog niet hebt opgelost.

6. Een puik probleem over positieve polynomen

M. (Mike) Daas, MSc.
Universiteit Leiden

Zij P een polynoom met positieve coëfficiënten. Bepaal het maximum van $P(x)^2/P(x^2)$ over alle $x \in \mathbb{R}$. Voor welke x wordt dit maximum aangenomen?

Over het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG)

Wat is het KWG? In 1778 opgericht, beoogt het KWG een verbindend orgaan te zijn voor de wiskundige beroepsgroep en een stimulans te bieden voor wiskundige activiteiten. Daarnaast vormt het KWG samen met de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren de twee pijlers van het Platform Wiskunde Nederland (PWN) dat politieke belangen van wiskundig Nederland behartigt.

Activiteiten van het KWG zijn o.a.:

- Uitbrengen van Pythagoras, een wiskundetijdschrift voor scholieren.
- Ondersteunen van de Kaleidoscoopdagen (die georganiseerd worden door de studieverenigingen).
- Organisatie van het jaarlijkse Nederlands Mathematisch Congres (voor alle wiskundigen in Nederland, i.h.b. voor wiskundigen werkzaam aan de universiteiten).
- Organisatie van het Wintersymposium (voor wiskundeleraren).
- Uitbrengen van Nieuw Archief voor de Wiskunde (4x per jaar voor alle leden; met informatie en artikelen over wiskunde voor algemeen wiskundig publiek).
- Uitbrengen van Indagationes Mathematicae (een internationaal wetenschappelijk tijdschrift).
- Beheren van Nederlandse wiskundige nalatenschap, bijv. het archief van Brouwer.

Wat kan het KWG betekenen voor wiskundestudenten?

- Één jaar gratis lidmaatschap (m.a.w.: 4x gratis het Nieuw Archief voor de Wiskunde.)
- Korting op het lidmaatschap zo lang je studeert.
- Goedkoop bijwonen Nederlands Mathematisch Congres.

Wie zit in het bestuur van het KWG? (anno najaar 2019) Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), Marije Elkenbracht (ABN AMRO), Barry Koren (TUE), Marie-Colette van Lieshout (CWI/UT), Michael Műger (RU), Wioletta Ruszel (UU) en Jan Wiegerinck (UvA).

De bestuursleden zijn tevens aanspreekpartners op de verschillende universiteiten.

Vragen? Kijk op de website: wiskgenoot.nl, of neem contact op met de secretaris: secretaris@wiskgenoot.nl.

7. Spiegelreflexdriehoek

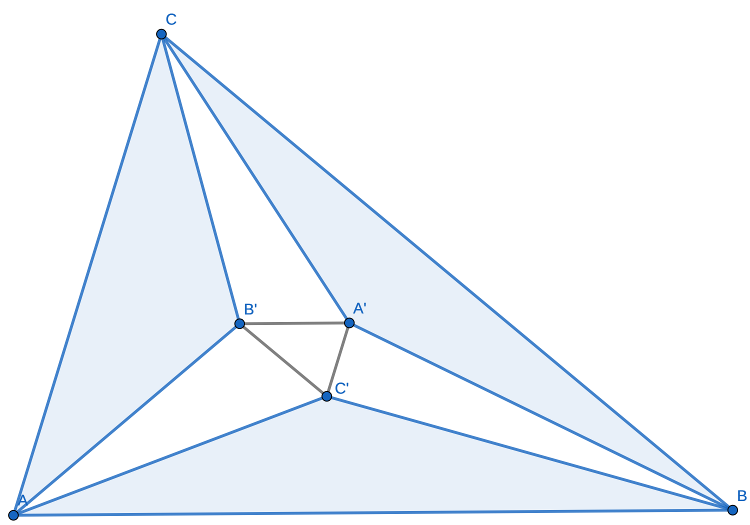
Ir. H. (Harold) de Boer
Transtrend BV

Ergens volledig binnen de driehoek ABC bevindt zich een kleinere driehoek $A'B'C'$ zodanig dat:

- $A'B'$ evenwijdig is met AB,
- $B'C'$ evenwijdig is met BC,
- $C'A'$ evenwijdig is met CA,
- De oppervlakte van $A'B'C'$ is f^2 maal de oppervlakte van ABC.

Bepaal de gezamenlijke oppervlakte van de driehoeken BCA', CAB' en ABC' als fractie van de oppervlakte van ABC uitgedrukt in f.

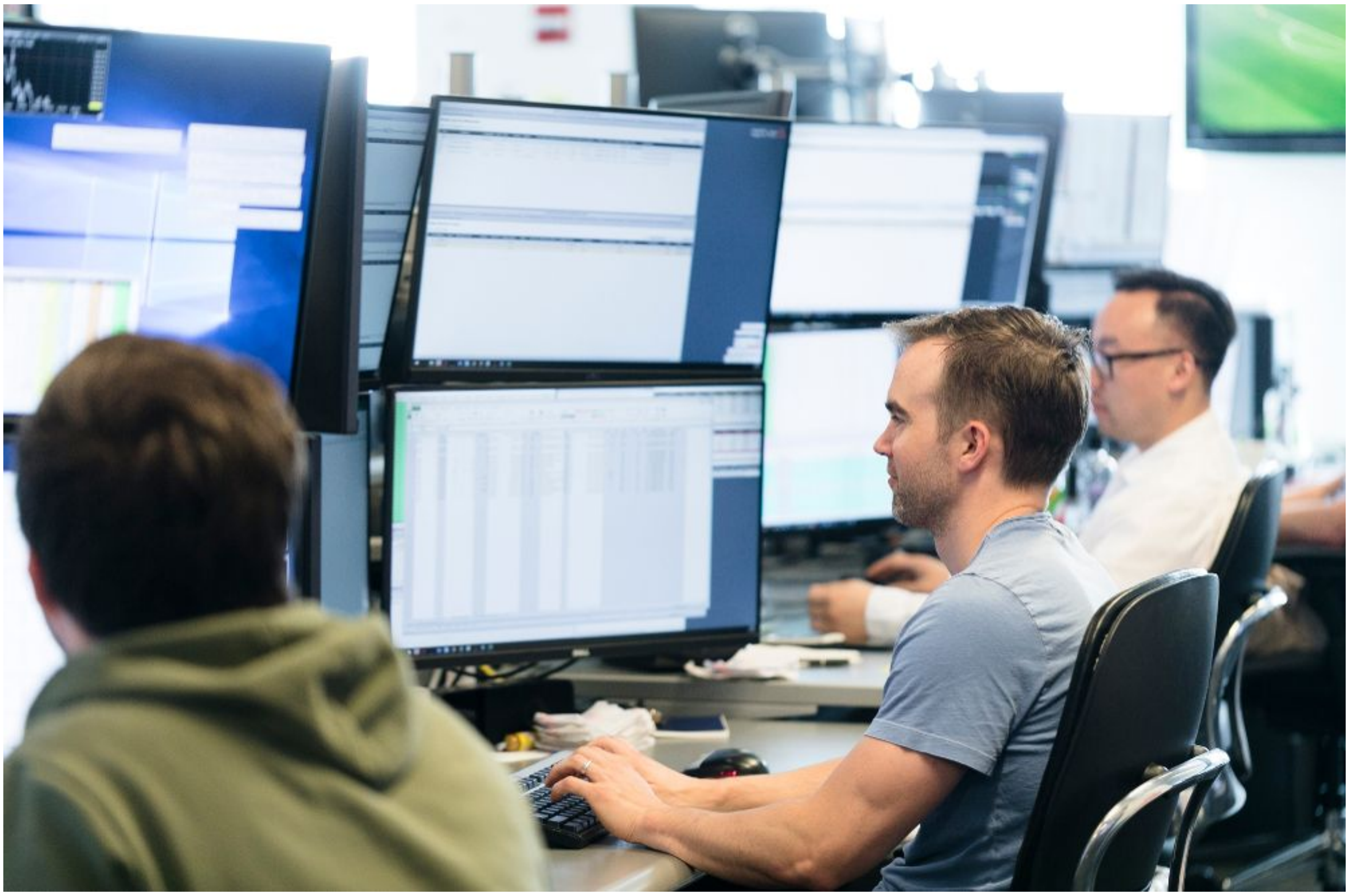
Let op: uit je berekening moet duidelijk zijn dat dit geldt ongeacht de vorm van de driehoek ABC en ongeacht de locatie van $A'B'C'$ binnen ABC.



8. Sommen van inverteerbare matrices

Prof. dr. H. W. (Hendrik) Lenstra
Universiteit Leiden

Stel n is een positief geheel getal, K is een lichaam en A is een $n \times n$-matrix over K die niet de som van twee inverteerbare $n \times n$-matrices over K is. Bewijs dat $n = 1, \#K = 2, A = (1)$.



What does trading mean? How could you use your mathematical and technical skills in the financial markets?

Join our lunch lecture with Prasad Chebolou, one of our Quantitative Researchers, who will join you tell you about trading and how you could use your mathematical skills at this industry.

We are market makers. In simple terms, we provide buy and sell prices for the financial products in exchanges all over the world. We help keep the markets viable by creating the liquidity needed to allow everyone to trade at will.

Interested to learn more about how you can use your skills in our company? Join us at 12pm to get the insights!

optiver

9. Superpositities van partities

dr. M. (Martijn) Kool
Universiteit Utrecht

Een *partitie* is een rij niet-negatieve gehele getallen $\lambda = \{\lambda_i\}_{i>0}$, zodanig dat $\lambda_i > 0$ voor eindig veel i en $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ voor alle $i > 0$. We noemen $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ de *grootte* van λ. Stel Λ is de collectie van alle partities met positieve grootte.

a) Bewijs dat

$$1 + \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}.$$

De *drager* van een partitie λ is de functie $f_\lambda : \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} \to \{0,1\}$ met

$$f_\lambda(i,j) := \begin{cases} 1 & \text{als } j \leq \lambda_i \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Een *vlakke partitie* is een rij niet-negatieve gehele getallen $\pi = \{\pi_{ij}\}_{i,j>0}$ zodanig dat $\pi_{ij} > 0$ voor eindig veel i, j en $\pi_{ij} \geq \pi_{i+1,j}$,$\pi_{ij} \geq \pi_{i,j+1}$ voor alle $i, j \geq 1$. We noemen $|\pi| := \sum_{i,j} \pi_{ij}$ de *grootte* van π. Stel Π is de collectie van alle vlakke partities met positieve grootte. Aan een vlakke partitie $\pi \in \Pi$ kennen we als volgt een gewicht w_π toe. Stel

$$W_\pi := \Big\{\{n_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} : n_\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall \lambda \in \Lambda \text{ en } \pi_{ij} = \sum_{\lambda\in\Lambda} n_\lambda \cdot f_\lambda(i,j)\ \forall i,j \geq 1\Big\},$$

dan definiëren we het gewicht van π als

$$w_\pi := \prod_{\{n_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in W_\pi} \prod_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{n_\lambda !}.$$

b) Bewijs

$$1 + \sum_{\pi\in\Pi} w_\pi p^{\pi_{11}} q^{|\pi|} = \exp\Big(p \sum_{\lambda\in\Lambda} q^{|\lambda|}\Big).$$

c) Bewijs

$$1 + \sum_{\pi\in\Pi} w_\pi \prod_{n=1}^{\pi_{11}} (N-(n-1)) q^{|\pi|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^N},$$

voor alle $N \in \mathbb{Z}_{>0}$

10. Aantal getallen die relatief priem zijn is niet relatief priem

drs. S. (Stijn) Cambie
Radboud Universiteit Nijmegen

De Euler totiënt functie ϕ is gedefinieerd als de functie die een natuurlijk getal n met priemfactorisatie $\prod_{i=1}^{j} p_i^{e_i}$ afbeeldt op

$$\prod_{i=1}^{j} (p_i - 1) p_i^{e_i - 1}.$$[2]

Wat is de kleinste verhouding voor m/n zodat voor alle natuurlijke getallen k geldt dat $\phi(k!)^n \mid (k!)^m$?

[2] Dit is gelijk aan het aantal getallen tussen 0 en n relatief priem met n.

11. Reële periodieke banen

Prof. dr. J. (Jaap) Top
Rijksuniversiteit Groningen

Voor een gegeven polynoom $p(x)$ in één variabele met reële coëfficiënten en een complex getal a_1, definiëren we een rij $(a_n)_{n\geq 1}$ door te itereren: dus $a_2 = p(a_1)$, $a_3 = p(a_2)$ et cetera. We hebben dan $a_{n+1} = p(a_n)$ voor alle gehele $n \geq 1$.

We noemen de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ een periodieke baan van deze iteratie als $a_m = a_1$ voor een $m > 1$. We noemen zo'n periodieke baan reëel wanneer $a_n \in \mathbb{R}$ voor alle n. Als voorbeeld kan je kijken naar $p(x) = x^2$. Elke rij die start met $a_1 = e^{2\pi i r}$, waarbij r een rationaal getal is met oneven noemer, is een periodieke baan. Ook is de rij die start met $a_1 = 0$ periodiek. Het blijkt dat dit alle periodieke banen zijn voor dit polynoom, en in het bijzonder zijn de enige reële periodieke banen de rijen die starten met $a_1 \in \{0, 1\}$. Veel van de periodieke banen zijn niet reëel.

Echter is de situatie heel anders voor het polynoom $q(x) = 2x^2 - 1$. Laat zien dat alle periodieke banen van $q(x)$ reëel zijn!

12. Kleur de lijn met oneindig veel kleuren

Prof. dr. D. (Dion) Gijswijt
Technische Universiteit Delft

We zoeken een surjectieve functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ met de eigenschap dat voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ het volgende geldt:

$$a + c = 2b \implies \#\{f(a), f(b), f(c)\} < 3.$$

Bestaat zo'n functie?