LIMO 2021

ANTWOORDEN BOEKJE

optiver
DIAMANT
Discrete, Interactive and Algorithmic Mathematics, Algebra and Number Theory
KWG
transtrend
ASML
TU/e EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
university of groningen
FLOW TRADERS
Utrecht University

Dit uitwerkingenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2021:
Ludo Dekker, Lizanne van der Laan, Jorke de Vlas, Jasper Oostlander, Stein Meereboer, Rinske Oskamp en Mieke Wessel
e-mail: `limo2020@a-eskwadraat.nl`
website: `limo.a-eskwadraat.nl`
Opgaven: J. Ittersum, R. van Bommel, F. van der Bult, I. Kryven, R. Versendaal, H. Smit, M. Staps, M. Daas, H. de Boer, H. Lenstra, M. Kool, S. Cambie, J. Top en D. Gijswijt.

Inhoudsopgave

1.	Functies met bepaalde symmetriën	2
2.	Surjectieve polynomen	4
3.	Een quadrant vierhoeken	7
4.	Gefranjerde tulp	10
5.	Voor 0 komt de som op	13
6.	Een puik probleem over positieve polynomen	15
7.	Spiegelreflexdriehoek	17
8.	Sommen van inverteerbare matrices	19
9.	Superposities van partities	21
10.	Aantal getallen die relatief priem zijn is niet relatief priem	24
11.	Reële periodieke banen	27
12.	Kleur de lijn met oneindig veel kleuren	28

1. Functies met bepaalde symmetriën

J.W. (Jan-Willem) M. van Ittersum, MSc.
Universiteit Utrecht

De sinusfunctie is een periodieke functie, i.e.,

$$\sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x),$$

en het polynoom in $\frac{1}{x}$ gegeven door $\varphi(x) = x^{-2021} + 1$ is een voorbeeld van een functie die voldoet aan

$$\varphi(x) = x^{-2021}\varphi\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

In deze opgave gaan we op zoek naar functies f die deze twee eigenschappen combineren, dat wil zeggen, functies waarvoor

(i) $f(x) = f(x+1)$;

(ii) $f(x) = x^{-2021} f\left(\frac{1}{x}\right)$ voor alle $x \neq 0$.

a) Laat zien dat er een *niet-constante* functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat die voldoet aan eigenschappen (i) en (ii) voor alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Laat zien dat er geen *continue* niet-constante functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat die voldoet aan eigenschappen (i) en (ii) voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Zij $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. We construeren een niet-constante continue periodieke functie $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ die ook aan de tweede eigenschap voldoet, als volgt:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{((8m+5)z + (8n+5))^{2021}}.$$

Je mag zonder bewijs gebruiken dat deze dubbele som absoluut convergeert voor $z \in \mathfrak{h}$: de waarde van deze dubbele som hangt dus niet af van de volgorde van sommatie.

c) Bewijs dat $f(z) = f(z+8)$ en $f(z) = z^{-2021} f\left(\frac{1}{z}\right)$ voor alle $z \in \mathfrak{h}$.[1]

Uitwerking.
In deze uitwerkingen noemen we de noemer van een rationaal getal x de kleinste positieve gehele q waarvoor er een gehele p bestaat met $x = \frac{p}{q}$. Bijvoorbeeld, de noemer van $\frac{3}{6}$ is 2.

a) Neem bijvoorbeeld

$$f(x) = \begin{cases} q^{2021} & x \in \mathbb{Q} \text{ met noemer } q \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

b) Schrijf $a = f(0)$. We bewijzen met inductie naar de grootte van de noemer q van $x \in \mathbb{Q}$ dat er geldt $f(x) = aq^{2021}$. De inductiebasis geldt, want voor de gehele getallen x geldt wegens (i) dat $f(x) = a = a \cdot 1^{2021}$.

Stel nu dus dat we onze claim bewezen hebben voor alle noemers kleiner of gelijk aan

[1] Functies zoals in deel (c) heten modulaire vormen. Ze spelen een belangrijke rol in het bewijs van *de laatste stelling van Fermat*, evenals bij het *bolpakkingsprobleem* in dimensie 8 en 24.

q. Zij $x \in \mathbb{Q}$ met noemer $q+1$ en schrijf $x = \frac{p}{q+1}$ voor een zeker $p \in \mathbb{Z}$. Wegens (i) kunnen we aannemen dat $0 \leq p < q$. Merk op $p \neq 0$, want $q > 1$ is de noemer van x en $\frac{0}{q}$ is een geheel getal met noemer 1. Nu geldt er dat

$$f\left(\frac{p}{q+1}\right) = \left(\frac{p}{q+1}\right)^{2021} f\left(\frac{q+1}{p}\right) = \left(\frac{p}{q+1}\right)^{-2021} ap^{2021} = a(q+1)^{2021},$$

waaruit we de claim concluderen. Aangezien voor gehele n geldt dat $f\left(\frac{1}{n}\right) = n^{2021}$ en $1/n \to 0$ en $n^{2021} \to \infty$ als $n \to \infty$, concluderen we dat f niet continue kan zijn in 0 tenzij $a = 0$. In dat geval geldt $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$. De enige continue functie $\Gamma \to \Gamma$ die daar aan voldoet is de nulfunctie, maar we zochten een niet-constante functie.

c) Dat $f(z) = f(z+8)$ volgt door de sommatievariabele n te vervangen door $n + 8m + 5$. De transformatie voor $1/z$ volgt juist door de sommatievariabelen (m, n) om te wisselen. Omdat de volgorde van sommatie niet uitmaakt, gelden deze twee transformaties inderdaad.

2. Surjectieve polynomen

dr. R. (Raymond) van Bommel
Massachusetts Institute of Technology

a) Bestaat er een polynoom $P \in \mathbb{Q}[x]$ zodanig dat de functie $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\colon x \mapsto P(x)$ surjectief is en $\deg P > 1$?

b) Voor welke priemgetallen p bestaat er een polynoom $P \in \mathbb{Z}[x]$ zodanig dat de functie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\colon x \mapsto P(x) \bmod p$ surjectief is en $\deg P > 1$?

c) Bestaat er een polynoom $P \in \mathbb{Z}[x]$ met $\deg P > 1$, zodanig dat de functie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\colon x \mapsto P(x) \bmod p$ surjectief is voor oneindig veel priemgetallen p?

d) Bestaat er een polynoom $P \in \mathbb{Z}[x]$ met $\deg P > 1$, zodanig dat de functie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\colon x \mapsto P(x) \bmod p$ surjectief is voor alle priemgetallen p?

Uitwerking.

a) We gaan bewijzen dat zo'n polynoom niet bestaat. Zij $P = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ een polynoom van graad $n \geq 2$. Omdat P eindig veel coëfficiënten heeft, is er een priemgetal p zodat p niet voorkomt in de noemers en tellers van de coëfficiënten c_i van P. Nu claimen we dat $\frac{1}{p}$ niet in het beeld ligt van P. Stel dat $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ een rationaal getal is met $a, b \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{ggd}(a, b) = 1$ en $b \neq 0$. Dan geldt dat

$$b^n \cdot P\Big(\frac{a}{b}\Big) = \sum_{i=0}^{n} c_i a^i b^{n-i} p^{n-i}.$$

Als $p \mid a$ en dus $p \nmid b$, dan heeft de rechterkant minstens n factoren p en moet $P(\frac{a}{b})$ ook minstens n factoren p bevatten. Als $p \nmid a$, dan hebben alle termen aan de rechterkant minstens één factor p, behalve de term $c_n a^n$ die 0 factoren p bevat. De linkerkant moet dus ook 0 factoren p hebben, maar dat betekent dat het aantal factoren p in $P(\frac{a}{b})$ een veelvoud van $n > 1$ moet zijn. In beide gevallen zien we dat $P(\frac{a}{b}) \neq \frac{1}{p}$, zoals we wilden bewijzen.

b) Voor ieder priemgetal p kun je het polynoom x^p nemen. Vanwege de kleine stelling van Fermat geldt dat $x^p \equiv x \bmod p$ en dus is de gevraagde functie surjectief.

c) We gaan laten zien dat het polynoom $P = x^3$ aan de eisen voldoet. Als p een priemgetal is, dan is de eenheden groep $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ van het lichaam $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cyclisch van orde $p-1$. Als functie stuurt P het element 0 naar 0 en de eenhedengroep naar de eenhedengroep en deze functie op de eenhedengroep is surjectief dan en slechts dan als $p-1$ niet congruent is aan $0 \bmod 3$. We gaan nu bewijzen dat er oneindig veel priemgetallen p bestaan met $p \equiv 2 \bmod 3$.
Stel dat er maar eindig veel zulke priemgetallen bestaan, zeg $p_1, \ldots, p_\ell$. Bekijk dan het getal

$$N = p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_\ell^2 + 1 > 1.$$

Het getal N is nu congruent aan $2 \bmod 3$ en de priemfactorisatie van N kan dus niet alleen maar bestaan uit priemgetallen die $0 \bmod 3$ of $1 \bmod 3$ zijn, maar N is overduidelijk niet deelbaar door $p_1, \ldots, p_\ell$. Dit geeft een tegenspraak.

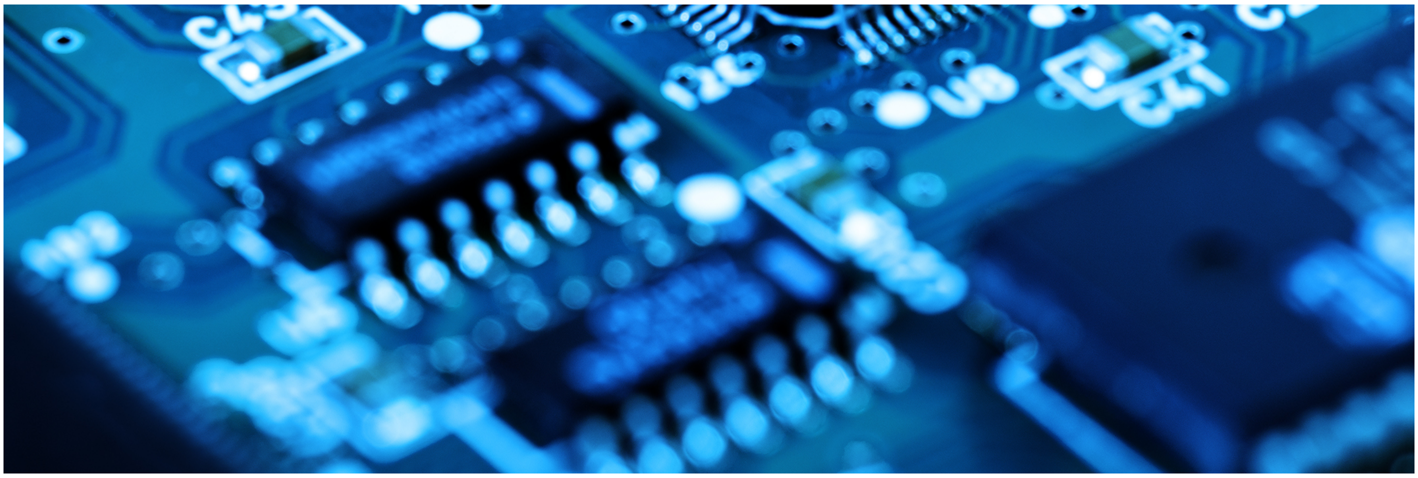
d) We gaan laten zien dat zo'n polynoom niet bestaat. In het bijzonder gaan we laten zien dat er een $n \in \mathbb{Z}$ bestaat zodanig dat $|P(n) - P(n+1)| > 1$. Als we dit eenmaal bewezen hebben, kunnen we een priemdeler p van $|P(n) - P(n+1)|$ nemen en dan is het evident dat $P(n) \equiv P(n+1) \bmod p$. In het bijzonder is de functie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \colon x \mapsto P(x)$ niet injectief, maar dan kan de functie ook niet surjectief zijn, omdat $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eindig is.
Stel nu uit het ongerijmde dat $|P(n+1) - P(n)| \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Dan kunnen we de driehoeksongelijkheid en inductie gebruiken om te bewijzen dat $|P(n) - P(0)| \leq |n|$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Als we P nu schrijven als $\sum_{i=0}^{d} c_i x^i$ met $d = \deg(P)$ (en dus $c_d \neq 0$), dan zien we dat

$$P(n) - P(0) = \sum_{i=1}^{d} c_i n^i.$$

In het bijzonder volgt dan dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n) - P(0)}{n} = \lim_{n\to\infty} n^{d-1} \sum_{i=1}^{d} c_i n^{i-d} = \lim_{n\to\infty} n^{d-1} c_d = \begin{cases} \infty & \text{als } c_d > 0, \\ -\infty & \text{als } c_d < 0. \end{cases}$$

Dit is in tegenspraak met de ongelijkheid $|P(n) - P(0)| \leq |n|$ die we eerder bewezen hadden.



ASML is a high-tech company, headquartered in the Netherlands. We manufacture the complex lithography machines that chipmakers use to produce integrated circuits, or computer chips. Over 30 years, we have grown from a small startup into a multinational company with over 60 locations in 16 countries and annual net sales of €11.8 billion in 2019.

Behind ASML's innovations are engineers who think ahead. The people who work at our company include some of the most creative minds in physics, electrical engineering, mathematics, chemistry, mechatronics, optics, mechanical engineering, computer science and software engineering.

Because ASML spends more than €2 billion per year on R&D, our teams have the freedom, support and resources to experiment, test and push the boundaries of technology. They work in close-knit, multidisciplinary teams, listening to and learning from each other.

If you are passionate about technology and want to be a part of progress, visit www.asml.com/careers.

3. Een quadrant vierhoeken

Dr. F. (Fokko) J. van de Bult
Technische Universiteit Delft

Beschouw een convexe vierhoek $ABCD$ die geen twee parallele zijden heeft. We definiëren bij deze vierhoek vier parallellogrammen. Dit doen we door steeds één hoekpunt weg te laten, en een parallelogram te maken met de drie overige hoekpunten, waarbij twee zijdes overeenkomen met zijdes van de oorspronkelijke vierhoek $ABCD$.

Bijvoorbeeld als $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (2,1)$ en $D = (3,5)$, dan heeft het parallellogram behorende bij driehoek ABC als vierde hoekpunt $D' = (1,1)$.

Laat zien dat precies één van deze vier parallellogrammen volledig bevat is binnen de oorspronkelijke vierhoek $ABCD$.

Uitwerking.
Laat A' het punt zijn zodat $A'BCD$ een paralellogram is. Merk op dat deze paralellogram volledig in $ABCD$ ligt dan en slechts dan als A' in $ABCD$ ligt. Dit volgt uit de convexheid van $ABCD$. We zullen nu bewijzen dat A' in $ABCD$ ligt dan en slechts dan als $\angle B + \angle C > 180°$ en $\angle C + \angle D > 180°$.
Ten eerste merken we op dat $\angle B + \angle C$ niet precies $180°$ kan zijn omdat dan AB en CD evenwijdig zouden zijn. Het zelfde geldt voor $\angle C + \angle D$ want dan zouden AD en BC evenwijdig zijn.
Stel nu dat $\angle B + \angle C < 180°$. Omdat $A'BCD$ een parallelogram is geldt $\angle A'BC + \angle BCD = 180°$. Dus $\angle A'BC + \angle C = 180°$. Dit combineren geeft $\angle B < 180° - \angle C = \angle A'BC$. Oftewel de lijn $A'B$ ligt buiten $\angle ABC$ en A' kan niet in $ABCD$ liggen. Op analoge manier zal $\angle C + \angle D < 180°$ aantonen dat A' buiten de vierhoek ligt.
Stel daarentegen dat zowel $\angle B + \angle C > 180°$ als $\angle C + \angle D > 180°$. Dan zien we nu op eenzelfde manier dat $\angle B$ en $\angle D$ groter zijn dan $\angle A'BC$ en $\angle A'DC$ respectievelijk. Dus liggen de lijnen $A'B$ en $A'D$ in ieder geval gedeeltelijk in de vierhoek. Verder merken we op dat $A'B$ en AB geen ander snijpunt dan B hebben, $A'B$ en BC ook niet en dat $A'B$ en CD evenwijdig zijn. Dus als de lijn $A'B$ de vierhoek weer wil verlaten moet het wel snijden met het lijnstuk AD. Analoog geldt dat $A'D$ het lijnstuk AB moet snijden. Oftewel $A'B$ is een lijn die van lijnstuk BC naar AD gaat en $A'D$ een lijn die van lijnstuk AB naar CD gaat. Hieruit volgt dat $A'D$ en $A'B$ elkaar wel moeten snijden binnen in de vierhoek $ABCD$ en dus dat A' in die vierhoek ligt. Dit bewijst de claim dat A' in $ABCD$ ligt dan en slechts dan als $\angle B + \angle C > 180°$ en $\angle C + \angle D > 180°$.
Op eenzelfde manier kunnen we eisen stellen om te zien of B', C' en D' in de vierhoek liggen. Echter zit er wel een bepaald verband tussen deze eisen die volgt uit het feit dat de hoekensom van een vierhoek altijd $360°$ is. Als we bijvoorbeeld weten dat $\angle B + \angle C > 180°$ dan weten we ook dat $\angle A + \angle D < 180°$ en andersom. De vier gevallen afgaan geeft dan eerst de volgende voorwaarde zodat een bepaald punt binnen het vierhoek ligt.

$$\begin{aligned}
A' :& \angle B + \angle C > 180° \wedge \angle C + \angle D > 180° \\
B' :& \angle A + \angle D > 180° \wedge \angle C + \angle D > 180° \\
C' :& \angle A + \angle D > 180° \wedge \angle A + \angle B > 180° \\
D' :& \angle B + \angle C > 180° \wedge \angle A + \angle B > 180°.
\end{aligned}$$

En na omschrijving vinden we:

$$\begin{aligned}
A' &: \angle B + \angle C > 180^\circ \wedge \angle C + \angle D > 180^\circ \\
B' &: \angle B + \angle C < 180^\circ \wedge \angle C + \angle D > 180^\circ \\
C' &: \angle B + \angle C < 180^\circ \wedge \angle C + \angle D < 180^\circ \\
D' &: \angle B + \angle C > 180^\circ \wedge \angle C + \angle D < 180^\circ.
\end{aligned}$$

Het is duidelijk dat altijd precies één van deze vier gevallen moet gelden en dus dat er altijd precies één parallelogram in de vierhoek ligt.

Alternatieve Uitwerking.
Schrijf **a** voor de vector van de oorsprong naar A, etc. We nemen ook aan dat de vier hoekpunten in de volgorde $ABCD$ (tegen de klok in geordend) rond de vierhoek liggen. Dan hebben de vier parallellogrammen als hoekpunten de eindpunten van de vectoren

- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, en $\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}$.
- $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, en $\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{c}$.
- $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{a}$ en $\mathbf{c}+\mathbf{a}-\mathbf{d}$.
- $\mathbf{d}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{d}+\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

Voor de eerste nieuwe vierhoek $ABCD'$ ligt het hoekpunt D' in de vierhoek $ABCD$ als D' aan dezelfde kant van de lijnen CD en AD ligt als dat B ligt. Dit kunnen we testen met een determinant, wegens het welbekende onderstaande lemma

Lemma 1. *Punten U en V liggen aan dezelfde kant van de lijn XY als*

$$sign(\det(\overrightarrow{XU}\overrightarrow{XY})) = sign(\det(\overrightarrow{XV}\overrightarrow{XY})).$$

(NB Dit lemma wordt vaak anders gepresenteerd en volgt direct uit de interpretatie van een determinant als oppervlakte van het parallellogram gemaakt door de twee vectoren in de kolommen. Het teken geeft dan aan of je het snelst draait met de klok mee of tegen de klok in van de eerste naar de tweede kolom.)
Voor de vierhoek $ABCD'$ heb je dus de eisen

$$sign(\det(\overrightarrow{CD'}\overrightarrow{CD})) = sign(\det(\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CD})), \qquad sign(\det(\overrightarrow{AD'}\overrightarrow{AD})) = sign(\det(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD})).$$

Door de ligging van de punten langs de oorspronkelijke vierhoek weten we dat $\det(\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CD}) < 0$ en $\det(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}) > 0$. We krijgen derhalve de eis

$$sign(\det((\mathbf{a}-\mathbf{b})\ (\mathbf{d}-\mathbf{c}))) < 0, \qquad sign(\det((\mathbf{c}-\mathbf{b})\ (\mathbf{d}-\mathbf{a}))) > 0$$

Dus dit wordt

$$\det((\mathbf{a}-\mathbf{b})\ (\mathbf{d}-\mathbf{c})) < 0 \qquad \wedge \qquad \det((\mathbf{c}-\mathbf{b})\ (\mathbf{d}-\mathbf{a})) > 0$$

Met de drie andere parallellogrammen willen we dus dat precies één van de volgende vier uitspraken waar is

$$\begin{array}{lcl}
\det((\mathbf{a}-\mathbf{b})\ (\mathbf{d}-\mathbf{c})) < 0 & \wedge & \det((\mathbf{c}-\mathbf{b})\ (\mathbf{d}-\mathbf{a})) > 0 \\
\det((\mathbf{b}-\mathbf{c})\ (\mathbf{a}-\mathbf{d})) < 0 & \wedge & \det((\mathbf{d}-\mathbf{c})\ (\mathbf{a}-\mathbf{b})) > 0 \\
\det((\mathbf{c}-\mathbf{d})\ (\mathbf{b}-\mathbf{a})) < 0 & \wedge & \det((\mathbf{a}-\mathbf{d})\ (\mathbf{b}-\mathbf{c})) > 0 \\
\det((\mathbf{d}-\mathbf{a})\ (\mathbf{c}-\mathbf{b})) < 0 & \wedge & \det((\mathbf{b}-\mathbf{a})\ (\mathbf{c}-\mathbf{d})) > 0
\end{array}$$

Merk op dat we steeds kijken naar dezelfde twee determinanten; alleen zijn de tekens wat gewisseld door het eventueel omwisselen van de twee vectoren, dan wel één of beide vectoren in de matrix met -1 te vermenigvuldigen. Schrijven we

$$\delta_1 = \det((\mathbf{a}-\mathbf{b})\ (\mathbf{c}-\mathbf{d})), \qquad \delta_2 = \det((\mathbf{a}-\mathbf{d})\ (\mathbf{b}-\mathbf{c}))$$

dan worden de eisen

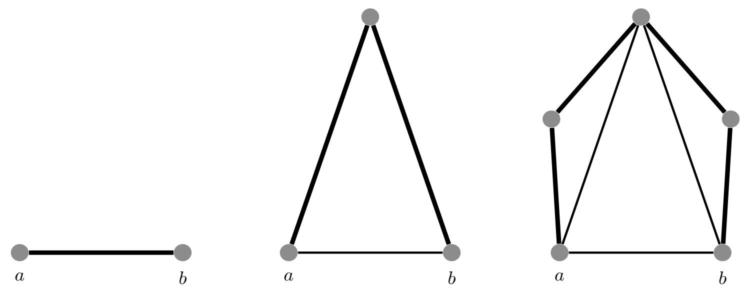
$$\begin{array}{ccc} \delta_1 > 0 & \wedge & \delta_2 < 0 \\ \delta_2 > 0 & \wedge & \delta_1 > 0 \\ \delta_1 < 0 & \wedge & \delta_2 > 0 \\ \delta_2 < 0 & \wedge & \delta_1 < 0 \end{array}$$

Omdat allevier de combinaties qua tekens precies 1 keer voorkomen, is nu helder dat er precies één van deze vier opties geldt. Merk op dat de determinanten allebei niet 0 zijn, omdat de zijden niet parallel mogen zijn.

Opmerking: Als je een algemeen derdegraads polynoom in twee variabelen $p(x, y) = ax^3 + bx^2y + \cdots + j$ neemt, dan heeft die 10 vrijheidsgraden van variabelen a t/m j. De eis dat een punt (x, y) een kritiek punt is ($\nabla p = \mathbf{0}$), geeft twee lineaire vergelijkingen in de vrijheidsgraden. Merk op dat j natuurlijk nooit voorkomt, omdat die weggedifferentieerd wordt, en dat je een polynoom altijd met een constante kunt vermenigvuldigen zonder de kritieke punten te veranderen. Dus als we vier punten aanwijzen als kritiek punt krijgen we 8 vergelijkingen in de 9 veranderlijken a t/m i en hebben we generiek een 1-dimensionale verzameling van oplossingen. Er is dus generiek 1 essentieel verschillend polynoom van graad 3 met deze vier kritieke punten.
Als de vier kritieke punten een convexe vierhoek vormen, dan blijken twee van de hoekpunten zadelpunten te worden, en de overige twee zijn een maximum en een minimum. Je kunt met behulp van de meetkunde van deze opgave uitvogelen wat de zadelpunten moeten zijn: Als punt D' in de vierhoek $ABCD$ ligt, dan zijn A en C zadelpunten en B en D zijn een maximum en een minimum. En als juist C' in de vierhoek ligt, dan zijn B en D zadelpunten, en juist A en C een maximum en een minimum.

4. Gefranjerde tulp

dr. ir. Rik Versendaal en dr. Ivan Kryven,
Universiteit Utrecht



0-tulp 1-tulp 2-tulp

Een n-tulp is de volgende iteratieve constructie: Een 0-tulp bestaat uit twee punten a en b verbonden met een lijn. Iteratief maken we een $(n+1)$-tulp van een n-tulp door aan iedere nieuwe lijn uit de vorige iteratie een driehoek te plakken.

Een gefranjerde n-tulp is een n-tulp waarvan elke lijn verwijderd wordt met kans $1-p$. We zeggen dat a en b verbonden zijn met een pad, als er ten minste een manier is om van a naar b te gaan gebruik makend van de lijnen. We zijn geïnteresseerd in $f_n(p)$, de kans dat er een pad is van a naar b in een gefranjerde n-tulp. Merk op dat per definitie $f_0(p) = p$, omdat het enige pad van a naar b de lijn (a, b) zelf is.

Laat zien dat:

a) $f_n \in C^\infty(0,1)$ voor $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $f_n(p)$ convergeert voor alle $p \in (0,1)$.

Laat $F : (0,1) \to [0,1]$ gedefinieerd zijn door $F(p) := \lim_{n\to\infty} f_n(p)$. Laat zien dat:

c) $F \in C^0(0,1)$ and $F \notin C^1(0,1)$.

Uitwerking.

a) Per definitie hebben we
$$f_0(p) = p.$$
In een 1-tulp zijn twee paden: de lijn uit de 0-tulp, welke aanwezig is met kans $f_0(p) = p$, of, als deze niet aanwezig is, de omweg via de twee nieuwe lijnen, welke tegelijkertijd aanwezig zijn met kans p^2. Er geldt dus
$$f_1(p) = p + (1-p)p^2,$$
en algemeen krijgen we de recursie:
$$f_{n+1}(p) = A_p(f_n(p)) := p + (1-p)f_n(p)^2.$$
Men kan zien dat $f_n(p)$ een polynoom van order $2n-1$ is, en daarom is f_n oneindig vaak differentieerbaar voor iedere eindige n.

b) Om te bewijzen dat $f_n(p)$ convergeert, merk eerst op dat $f_1(p) > f_0(p)$. Aannemend dat $f_n(p) > f_{n-1}(p)$ hebben we

$$f_{n+1}(p) = p + (1-p)f_n(p)^2 > p + (1-p)f_{n-1}(p)^2 = f_n(p).$$

Met behuilp van inductie volgt nu dat $f_n(p)$ een monotoon stijgende rij is. Aangezien ook geldt dat $f_n(p) \leq 1$ voor alle n, volgt er dat $f_n(p)$ convergeert.

c) We berekenen $F(p)$. Omdat $A_p(x)$ continu is, weten we dat $F(p)$ een vast punt van A_p is. Merk op dat de vergelijking

$$A_p(x) = x$$

twee oplossingen heeft, namelijk $x_1^* = 1$ en $x_2^* = \frac{p}{1-p}$.

Om $F(p)$ te bepalen, bekijken we de gevallen $p > \frac{1}{2}$ en $p \leq \frac{1}{2}$ apart.

- Laat $p > \frac{1}{2}$. Aangezien $f_n(p) \leq 1$ geldt er dat $F(p) \leq 1$. Omdat $p > \frac{1}{2}$, hebben we dat $x_2^* = \frac{p}{1-p} > 1$. Hieruit volgt dat $F(p) = x_1^* = 1$.

- Laat $p \leq \frac{1}{2}$. In dat geval hebben we dat $x_1^* \geq x_2^*$. Omdat $p < \frac{1}{2}$, geldt er dat $f_0(p) = p \leq \frac{p}{1-p}$. Aannemend dat $f_n(p) \leq \frac{p}{1-p}$, vinden we dat

$$f_{n+1}(p) = p + (1-p)f_n(p)^2 \leq p + (1-p)\frac{p^2}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}.$$

  Gebruik makend van inductie concluderen we dat $f_n(p) \leq \frac{p}{1-p} = x_2^*$ voor alle n. Dit impliceert dat $F(p) \leq x_2^*$. Aangezien $x_2^* \leq x_1^*$, volgt er dat $F(p) = x_2^* = \frac{p}{1-p}$.

Het samenvoegen van de twee gevallen geeft ons dat

$$F(p) = \begin{cases} \frac{p}{1-p}, & p < \frac{1}{2}, \\ 1, & p \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

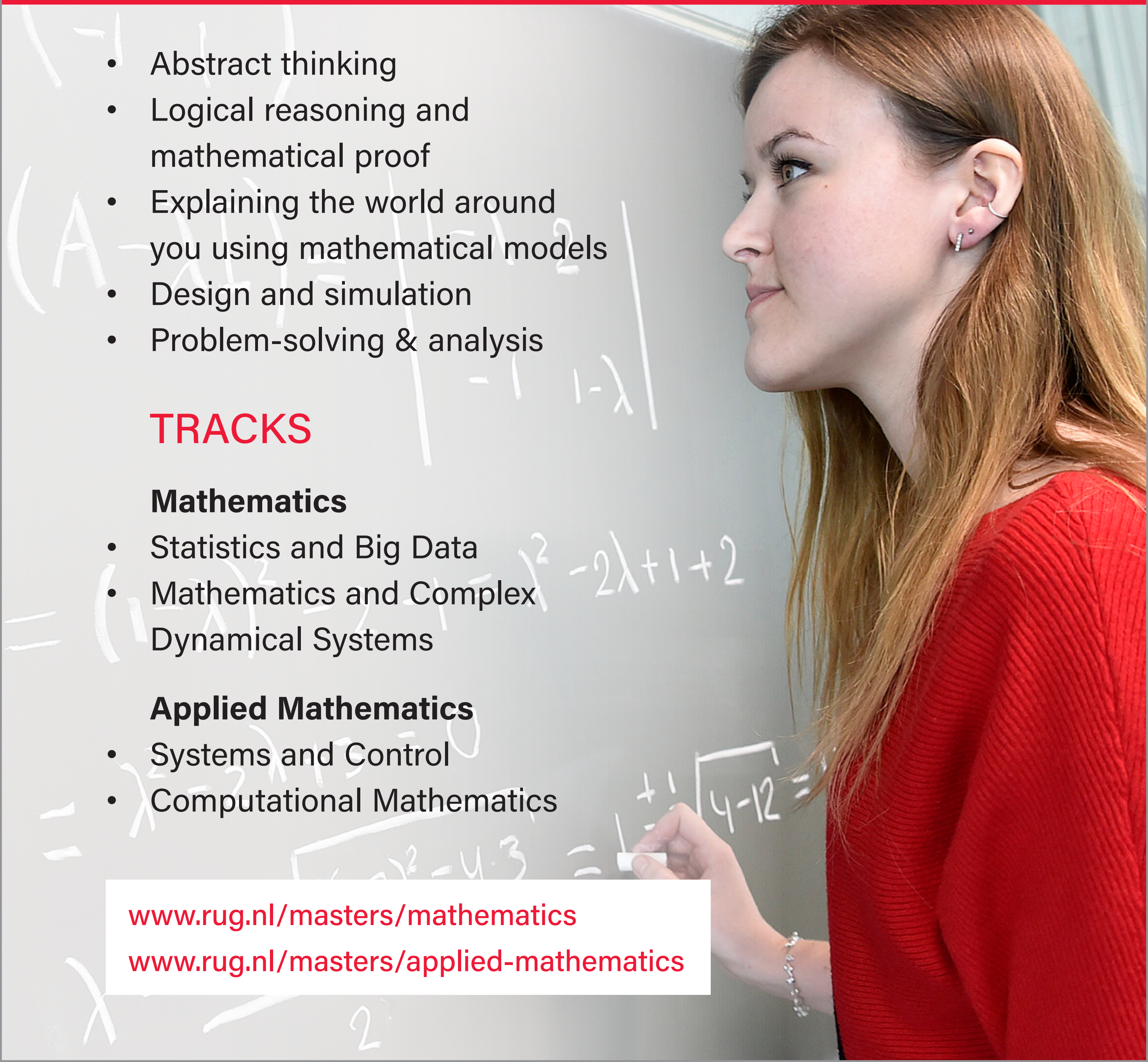
welke overal continu is, maar niet differentieerbaar in $p = \frac{1}{2}$.

university of groningen

faculty of science and engineering

International Master's degree programme in

• Mathematics
• Applied Mathematics



- Abstract thinking
- Logical reasoning and mathematical proof
- Explaining the world around you using mathematical models
- Design and simulation
- Problem-solving & analysis

TRACKS

Mathematics

- Statistics and Big Data
- Mathematics and Complex Dynamical Systems

Applied Mathematics

- Systems and Control
- Computational Mathematics

www.rug.nl/masters/mathematics

www.rug.nl/masters/applied-mathematics

5. Voor 0 komt de som op

dr. H. J. (Harry) Smit en M. (Merlijn) Staps, MSc.
Max Planck Institute Bonn & Princeton University

Waar bij de LIMO de opgaven elk jaar anders zijn, bekijken we in deze opgave juist verzamelingen waarvan alle sommen hetzelfde zijn.
Stel dat we een aantal rode en blauwe kaarten hebben met op elke kaart een geheel getal, zodat voor elk geheel getal k geldt dat het aantal manieren om een aantal rode kaarten uit te kiezen met som k gelijk is aan het aantal manieren om een aantal blauwe kaarten uit te kiezen met som k.

a) Bewijs dat als op de kaarten alleen positieve getallen voorkomen, er geldt dat er voor elk positief geheel getal ℓ precies evenveel rode kaarten zijn met ℓ erop als blauwe kaarten met ℓ erop.

b) Bewijs dat als op de kaarten ook negatieve getallen mogen voorkomen, geldt dat er voor elk positief geheel getal ℓ evenveel rode kaarten zijn met ℓ of $-\ell$ erop als blauwe kaarten met ℓ of $-\ell$ erop.

c) Bewijs dat als de rode en blauwe kaarten niet precies dezelfde getallen bevatten (dat is, niet voor ieder geheel getal ℓ geldt dat er evenveel rode kaarten zijn met ℓ erop als blauwe kaarten met ℓ erop), we een positief aantal rode kaarten kunnen uitkiezen zodat de som van de getallen op deze kaarten gelijk is aan 0.

Bij deze opgave mag je bij elk onderdeel de vorige onderdelen gebruiken, ook als je die nog niet hebt opgelost.

Uitwerking.

a) Merk allereerst op dat er evenveel rode als blauwe kaarten zijn, want het totale aantal manieren om een aantal rode kaarten uit te kiezen is $2^{|A|}$ (met A de verzameling rode kaarten) en het aantal manieren om een aantal blauwe kaarten uit te kiezen is $2^{|B|}$ (met B de verzameling blauwe kaarten). Leg nu de rode en de blauwe kaarten allebei op volgorde van klein naar groot, en stel dat de m-de rode kaart de eerste is die anders is dan de m-de blauwe (als zo'n m niet bestaat, zijn we klaar). Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat het getal x op de m-de rode kaart kleiner is dan het getal op de m-de blauwe kaart. Als we een aantal blauwe kaarten met som x willen kiezen, kunnen we alleen de eerste $m-1$ kaarten gebruiken, want de andere bevatten alleen getallen groter dan x. Voor elk van deze keuzes is er een bijbehorende keuze van rode kaarten die ook som x geeft, want de getallen op de eerste $m-1$ rode kaarten zijn gelijk aan de getallen op de eerste $m-1$ blauwe kaarten. Maar er is nog minstens één manier om rode kaarten te kiezen met som x: namelijk door alleen de m-de kaart te kiezen. We concluderen dat de voorwaarde uit de opgave niet geldt voor $k = x$, en uit die tegenspraak volgt het gevraagde.

b) Zij n_A de som van de getallen op alle rode kaarten waar een negatief getal op staat, en definieer n_B analoog voor de blauwe kaarten. Aangezien n_A de kleinste k is die we kunnen schrijven als de som van de getallen op een aantal rode kaarten, en net zo n_B de kleinste k is die we kunnen schrijven als de som van de getallen op een aantal blauwe kaarten, geldt $n_A = n_B$.

Voor elke rode kaart met daarop een getal x maken we een bijbehorende oranje kaart waar $|x|$ op staat. Net zo maken we voor elke blauwe kaart met daarop een getal y een

een bijbehorende paarse kaart waar $|y|$ op staat. Het is nu genoeg om te bewijzen dat er voor elk positief geheel getal ℓ evenveel oranje kaarten zijn met ℓ erop als paarse kaarten met ℓ erop. Omdat op de oranje en paarse kaarten alleen positieve getallen voorkomen, kunnen we hiervoor deel a) gebruiken. We moeten dan dus bewijzen dat de oranje en paarse kaarten de eigenschap hebben dat voor elk geheel getal k geldt dat het aantal manieren om een aantal oranje kaarten uit te kiezen met som k gelijk is aan het aantal manieren om een aantal paarse kaarten uit te kiezen met som k. Stel dat we een aantal oranje kaarten hebben gekozen met som k. Elke oranje kaart hoort bij een zekere rode kaart. We bekijken nu alle rode kaarten waarvoor geldt dat

- op de rode kaart staat een positief getal en de bijbehorende oranje kaart is gekozen; of
- op de rode kaart staat een negatief getal en de bijbehorende oranje kaart is niet gekozen.

Voor de rode kaarten met een positief getal erop geldt nu dat we deze kaart hebben gekozen precies als we de bijbehorende oranje kaart hebben gekozen. Voor elke rode kaart met een negatief getal erop geldt nu juist ofwel dat we deze kaart hebben uitgekozen, maar de bijbehorende oranje kaart niet, of juist dat we deze kaart niet hebben uitgekozen, maar de bijbehorende oranje kaart wel. Hieruit volgt dat de som van de getallen op de uitgekozen rode kaarten precies gelijk is aan k plus de som van de getallen op alle rode kaarten waar een negatief getal op staat; dus gelijk aan $k + n_A$. Merk bovendien op dat onze procedure waarmee we een keuze van oranje kaarten koppelen aan een keuze van rode kaarten bijectief is. Hieruit volgt dat het aantal manieren om oranje kaarten te kiezen met daarop getallen die optellen tot k gelijk is aan het aantal manieren om rode kaarten te kiezen met daarop getallen die optellen tot $k + n_A$. Net zo is het aantal manieren om paarse kaarten te kiezen met daarop getallen die optellen tot k gelijk aan het aantal manieren om blauwe kaarten te kiezen met daarop getallen die optellen tot $k+n_B$. Uit het feit dat $n_A = n_B$ en het feit dat de rode en blauwe kaarten de eigenschap uit de opgave hebben, volgt nu dat inderdaad het aantal manieren om oranje kaarten uit te kiezen met som k gelijk is aan het aantal manieren om paarse kaarten uit te kiezen met som k, en dat is precies wat we wilden aantonen.

c) Zolang we een rode en een blauwe kaart kunnen vinden met hetzelfde getal erop, gooien we allebei die kaarten weg; dan blijft nog steeds aan alle voorwaarden uit de opgave voldaan en hebben we minstens één kaart over. Wanneer dit niet meer mogelijk is, volgt uit onderdeel b) dat de getallen op de blauwe kaarten precies de tegengestelden van de getallen op de rode kaarten zijn. Zij nu s de som van de getallen op alle rode kaarten waar een positief getal op staat. Dan tellen de getallen op alle blauwe kaarten waar een negatief getal op staat op tot $-s$. Omdat $-s$ nu het kleinste getal is dat geschreven kan worden als een som van getallen op blauwe kaarten, is $-s$ ook het kleinste getal dat geschreven kan worden als een som van getallen op rode kaarten. We concluderen hieruit dat de som van de getallen op alle rode kaarten met een negatief getal erop gelijk is aan $-s$. Dus de som van alle getallen op de rode kaarten die niet zijn weggegooid is gelijk aan 0.

6. Een puik probleem over positieve polynomen

M. (Mike) Daas, MSc.
Universiteit Leiden

Zij P een polynoom met positieve coëfficiënten. Bepaal het maximum van $P(x)^2/P(x^2)$ over alle $x \in \mathbb{R}$. Voor welke x wordt dit maximum aangenomen?

Uitwerking.
Schrijf $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ en beschouw de vectoren

$$(\sqrt{a_0}, \sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}) \quad \text{and} \quad (\sqrt{a_0}, \sqrt{a_1}x, \ldots, \sqrt{a_n}x^n).$$

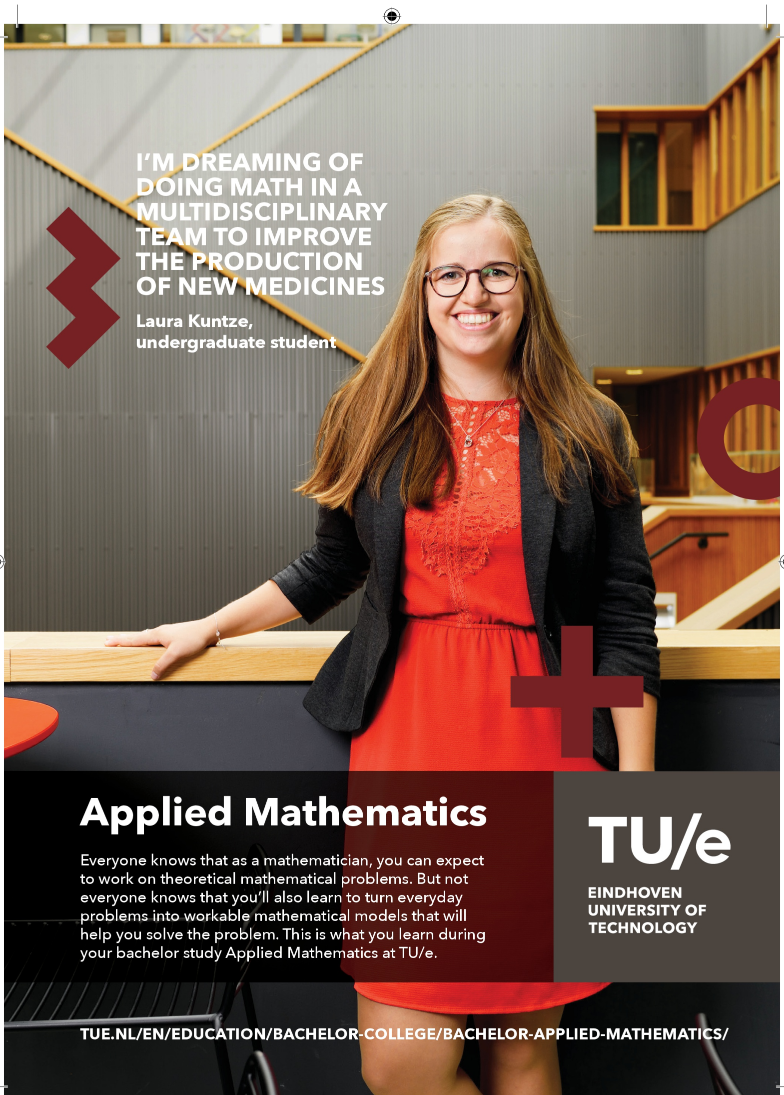
Als we hierop de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz toepassen, vinden we dat

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(a_0 + a_1 x^2 + \ldots a_n x^{2n}) \geq (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^2.$$

Met andere woorden, er geldt dat $P(1)P(x^2) \geq P(x)^2$ en zo volgt dat $P(x)^2/P(x)^2 \leq P(1)$. Gelijkheid kan enkel optreden wanneer de vectoren veelvouden zijn van elkaar. Omdat de eerste entries hetzelfde zijn en tevens niet nul, moeten de vectoren wel gelijk zijn. Dus enkel voor $x = 1$ kan het maximum worden aangenomen.

DIAMANT

Discrete, Interactive and Algorithmic Mathematics, Algebra and Number Theory



Applied Mathematics ad 170x240 mm.indd 1 31-07-20 15:42

Over het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG)

Wat is het KWG? In 1778 opgericht, beoogt het KWG een verbindend orgaan te zijn voor de wiskundige beroepsgroep en een stimulans te bieden voor wiskundige activiteiten. Daarnaast vormt het KWG samen met de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren de twee pijlers van het Platform Wiskunde Nederland (PWN) dat politieke belangen van wiskundig Nederland behartigt.

Activiteiten van het KWG zijn o.a.:

- Uitbrengen van Pythagoras, een wiskundetijdschrift voor scholieren.
- Ondersteunen van de Kaleidoscoopdagen (die georganiseerd worden door de studieverenigingen).
- Organisatie van het jaarlijkse Nederlands Mathematisch Congres (voor alle wiskundigen in Nederland, i.h.b. voor wiskundigen werkzaam aan de universiteiten).
- Organisatie van het Wintersymposium (voor wiskundeleraren).
- Uitbrengen van Nieuw Archief voor de Wiskunde (4x per jaar voor alle leden; met informatie en artikelen over wiskunde voor algemeen wiskundig publiek).
- Uitbrengen van Indagationes Mathematicae (een internationaal wetenschappelijk tijdschrift).
- Beheren van Nederlandse wiskundige nalatenschap, bijv. het archief van Brouwer.

Wat kan het KWG betekenen voor wiskundestudenten?

- Één jaar gratis lidmaatschap (m.a.w.: 4x gratis het Nieuw Archief voor de Wiskunde.)
- Korting op het lidmaatschap zo lang je studeert.
- Goedkoop bijwonen Nederlands Mathematisch Congres.

Wie zit in het bestuur van het KWG? (anno najaar 2019) Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), Marije Elkenbracht (ABN AMRO), Barry Koren (TUE), Marie-Colette van Lieshout (CWI/UT), Michael Műger (RU), Wioletta Ruszel (UU) en Jan Wiegerinck (UvA).

De bestuursleden zijn tevens aanspreekpartners op de verschillende universiteiten.

Vragen? Kijk op de website: wiskgenoot.nl, of neem contact op met de secretaris: secretaris@wiskgenoot.nl.

7. Spiegelreflexdriehoek

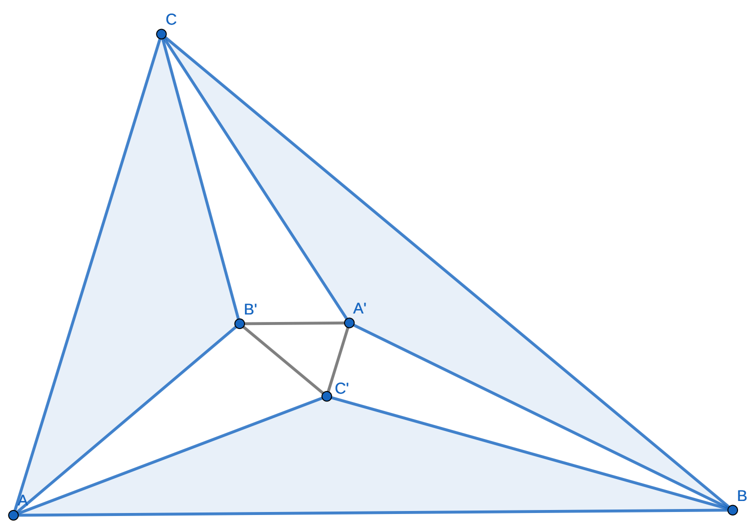
Ir. H. (Harold) de Boer
Transtrend BV

Ergens volledig binnen de driehoek ABC bevindt zich een kleinere driehoek $A'B'C'$ zodanig dat:

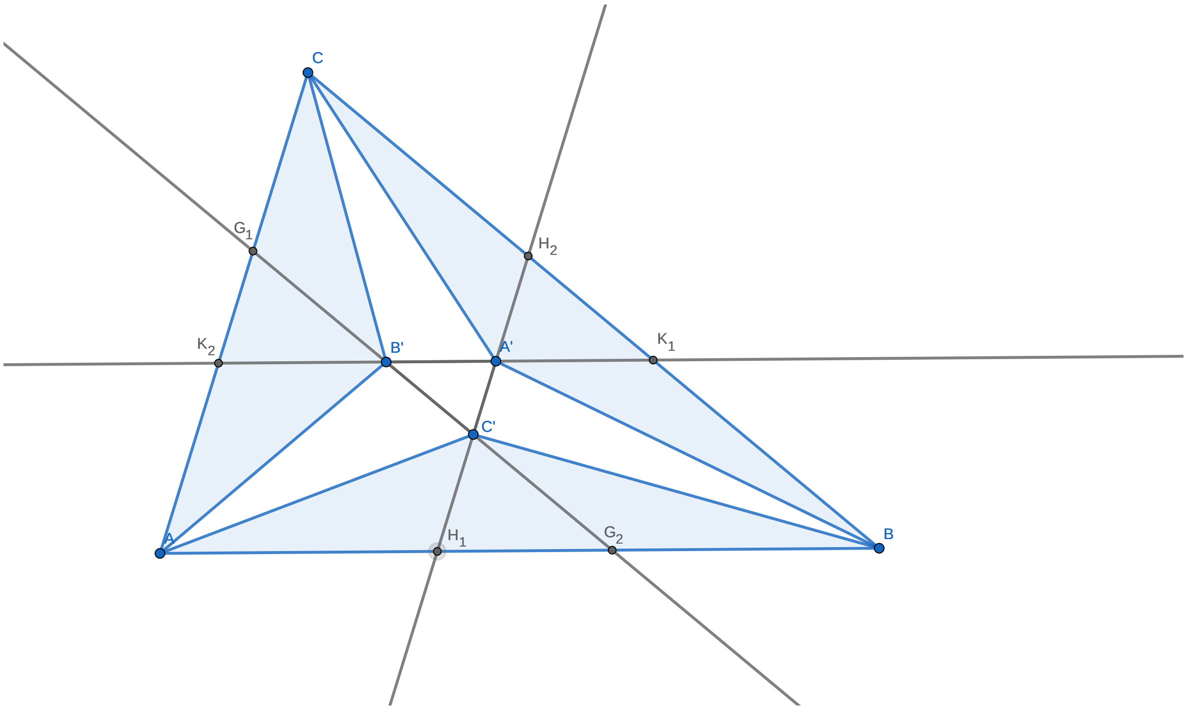
- $A'B'$ evenwijdig is met AB,
- $B'C'$ evenwijdig is met BC,
- $C'A'$ evenwijdig is met CA,
- De oppervlakte van $A'B'C'$ is f^2 maal de oppervlakte van ABC.

Bepaal de gezamenlijke oppervlakte van de driehoeken BCA', CAB' en ABC' als fractie van de oppervlakte van ABC uitgedrukt in f.

Let op: uit je berekening moet duidelijk zijn dat dit geldt ongeacht de vorm van de driehoek ABC en ongeacht de locatie van $A'B'C'$ binnen ABC.



Uitwerking.
Uit bovenstaande eigenschappen volgt direct dat $A'B'C'$ en ABC gelijkvormig zijn. De zijdes van $A'B'C'$ zijn f maal die van ABC. Verleng $B'C'$ zodat hij AC en AB snijdt. Definieer G_1 als het snijpunt van het verlengde van $B'C'$ met AC en G_2 als het snijpunt van $B'C'$ met AB. Op analoge wijze definiëren we H_1 en H_2 als de snijpunten van het verlengde van $C'A'$ door respectievelijk AB en BC, en K_1 en K_2 als de snijpunten van $A'B'$ met respectievelijk BC en AC.



Elk van de driehoeken AG_2G_1, H_1BH_2 en K_2K_1C is gelijkvormig met ABC met zekere factoren g, h en k respectievelijk. Elke driehoek $A'B'C'$ binnen ABC die aan bovenstaande eigenschappen voldoet is nu uniek bepaald door de factoren g, h en k.

De driehoeken H_1G_2C', $A'K_1H_2$ en $K_2B'G_1$ zijn ook gelijkvormig met ABC met respectievelijk factoren $(g+h-1)$, $(h+k-1)$ en $(k+g-1)$ ten opzichte van ABC. Hieruit volgt dat de oppervlaktes van ABC', BCA' en CAB' gelijk zijn aan respectievelijk $(g+h-1)$, $(h+k-1)$ en $(k+g-1)$ maal de oppervlakte van ABC. Hieruit volgt dat de totale oppervlakte van deze driehoeken (ten opzichte van die van ABC) gelijk is aan $(g+h+k)-3$.

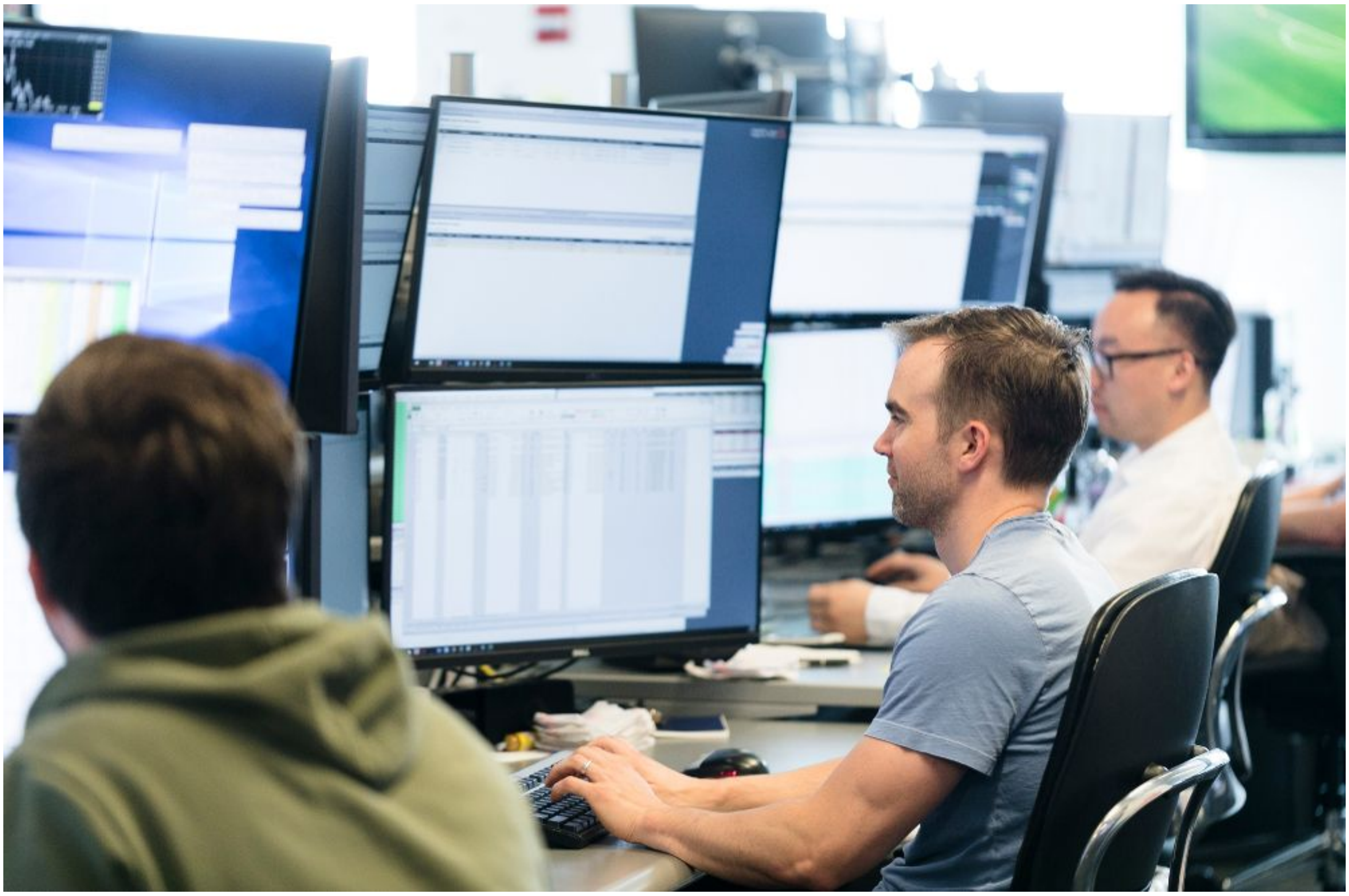
Wat nu nog mist is de relatie tussen f en g, h en k. Merk op dat $|B'C'| = |G_1G_2| - |G_1B'| - |C'G_2|$. Dit geeft $f|BC| = g|BC| - (g+k-1)|BC| - (k+h-1)|BC|$ waaruit volgt dat $f = 2-(g+h+k)$ en dus $g+h+k = 2-f$. Door dit in bovenstaande vergelijking te substitueren vinden we dat $2(g+h+k)-3 = 2(2-f)-3 = 1-2f$.

8. Sommen van inverteerbare matrices

Prof. dr. H. W. (Hendrik) Lenstra
Universiteit Leiden

Stel n is een positief geheel getal, K is een lichaam en A is een $n \times n$-matrix over K die niet de som van twee inverteerbare $n \times n$-matrices over K is. Bewijs dat $n = 1, \#K = 2, A = (1)$.

Uitwerking.
Voor $n = 1$ is dit heel gemakkelijk. Neem dus $n > 1$. In dit geval is het voldoende te bewijzen: als V en W twee K-vectorruimten van dimensie n zijn, dan is elke K-lineaire afbeelding $f : V \to W$ de som van twee isomorfismen. Om dit te doen, kiezen we een basis $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ van $f(V)$, met v_i in V. Dan kunnen we $v_1, \ldots, v_k$ met een basis $v_{k+1}, \ldots, v_n$ van de kern van f aanvullen tot een basis $v_1, \ldots, v_n$ van V, en ook kunnen we $w_n = f(v_1), w_1 = f(v_2), \ldots, w_{k-1} = f(v_k)$ tot een basis $w_1, \ldots, w_n$ van W aanvullen. Laat F nu de $n \times n$-matrix zijn die f beschrijft op deze beide bases; dan is F een matrix die k enen buiten de diagonaal heeft staan, en verder nullen. In het bijzonder is F een matrix die alleen nullen op de diagonaal heeft staan. Laat nu B de matrix zijn die overal op de diagonaal 1 heeft staan, boven de diagonaal met F samenvalt, en onder de diagonaal alleen nullen heeft. Dan heeft $C = F - B$ overal op de diagonaal -1 staan, valt onder de diagonaal met F samen, en is nul boven de diagonaal. Dus we hebben $F = B + C$ met B en C beiden inverteerbaar, en $f = b + c$ met b en c isomorfismen $V \to W$.



What does trading mean? How could you use your mathematical and technical skills in the financial markets?

Join our lunch lecture with Prasad Chebolou, one of our Quantitative Researchers, who will join you tell you about trading and how you could use your mathematical skills at this industry.

We are market makers. In simple terms, we provide buy and sell prices for the financial products in exchanges all over the world. We help keep the markets viable by creating the liquidity needed to allow everyone to trade at will.

Interested to learn more about how you can use your skills in our company? Join us at 12pm to get the insights!

optiver

9. Superposities van partities

dr. M. (Martijn) Kool
Universiteit Utrecht

Een *partitie* is een rij niet-negatieve gehele getallen $\lambda = \{\lambda_i\}_{i>0}$, zodanig dat $\lambda_i > 0$ voor eindig veel i en $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ voor alle $i > 0$. We noemen $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ de *grootte* van λ. Stel Λ is de collectie van alle partities met positieve grootte.

a) Bewijs dat

$$1 + \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}.$$

De *drager* van een partitie λ is de functie $f_\lambda : \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} \to \{0,1\}$ met

$$f_\lambda(i,j) := \begin{cases} 1 & \text{als } j \leq \lambda_i \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Een *vlakke partitie* is een rij niet-negatieve gehele getallen $\pi = \{\pi_{ij}\}_{i,j>0}$ zodanig dat $\pi_{ij} > 0$ voor eindig veel i,j en $\pi_{ij} \geq \pi_{i+1,j}$,$\pi_{ij} \geq \pi_{i,j+1}$ voor alle $i,j \geq 1$. We noemen $|\pi| := \sum_{i,j} \pi_{ij}$ de *grootte* van π. Stel Π is de collectie van alle vlakke partities met positieve grootte. Aan een vlakke partitie $\pi \in \Pi$ kennen we als volgt een gewicht w_π toe. Stel

$$W_\pi := \Big\{\{n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} : n_\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \forall \lambda \in \Lambda \text{ en } \pi_{ij} = \sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda \cdot f_\lambda(i,j) \ \forall i,j \geq 1\Big\},$$

dan definiëren we het gewicht van π als

$$w_\pi := \prod_{\{n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in W_\pi} \prod_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{n_\lambda !}.$$

b) Bewijs

$$1 + \sum_{\pi \in \Pi} w_\pi p^{\pi_{11}} q^{|\pi|} = \exp\Big(p \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{|\lambda|}\Big).$$

c) Bewijs

$$1 + \sum_{\pi \in \Pi} w_\pi \prod_{n=1}^{\pi_{11}} (N - (n-1)) q^{|\pi|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^N},$$

voor alle $N \in \mathbb{Z}_{>0}$

Uitwerking.

a) We herkennen de uitdrukking van een meetkundige reeks

$$\frac{1}{1-q^n} = 1 + q^n + q^{2n} + q^{3n} + \ldots.$$

Dus voor het product geldt dan

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = (1 + q + q^2 + \ldots)(1 + q^2 + q^4 + \ldots)(1 + q^3 + q^6 + \ldots) \cdots.$$

We gaan nu een bijectie maken tussen Λ en de niet 1 termen van deze uitdrukking. Met een term bedoelen we iets van de vorm $q^{m_1+2m_2+3m_3+\dots}$ waarbij $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en de term dus wordt verkregen door uit $(1+q+q^2+\dots)$ de m_1-de term (q^{m_1}) te vermenigvuldigen met uit $(1+q^2+q^4+\dots)$ de m_2-de term (q^{2m_2}) et cetera.
Stel dus dat $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ en definieer r_m als het aantal λ_i dat gelijk is aan m. Dan wordt de bijectie gegeven door

$$\lambda \mapsto q^{r_1} q^{2r_2} q^{3r_3} \cdots = q^{r_1+2r_2+3r_3+\dots} = q^{|\lambda|}.$$

Dit geeft inderdaad een bijectie waaruit direct blijkt dat

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} q^{|\lambda|} = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \right) - 1.$$

De 1 naar de andere kant halen bewijst vervolgens de opgave.

b) We beginnen met het herschrijven van de rechterkant. Hiervoor gebruiken we eerst dat $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ en daarna dat de Taylorreeks voor $\exp(x)$ gelijk is aan $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$.

$$\exp\Big(p \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{|\lambda|}\Big) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \exp(pq^{|\lambda|}) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \big(1 + pq^{|\lambda|} + \frac{p^2 q^{2|\lambda|}}{2!} + \dots\big).$$

Ten tweede merken we op dat $\pi_{11} = \sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda$ en $|\pi| = \sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda |\lambda|$. De linkerkant wordt hiermee gelijk aan

$$1 + \sum_{\pi \in \Pi} \Big(\prod_{\{n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in W_\pi} \prod_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{n_\lambda!} p^{n_\lambda} q^{n_\lambda |\lambda|} \Big).$$

Nu gaan we uitleggen waarom deze twee uitdrukkingen hetzelfde zijn.
Beschouw een term van de eerste uitdrukking die het product is van $\frac{p^{m_\lambda} q^{m_\lambda}}{m_\lambda!}$ over alle λ. Door $n_\lambda = m_\lambda$ te stellen krijgen we dan ook een unieke term in de tweede uitdrukking. Merk hiervoor op dat elke $\{n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ een unieke π geeft. We missen hiermee alleen het rijtje $m_\lambda = 0$ voor alle λ maar die wordt gecompenseerd door de 1 aan het begin.

c) Merk op dat $w_\pi \prod_{n=1}^{\pi_{11}} (N-(n-1)) q^{|\pi|}$ gelijk is aan 0 voor π waarvoor geldt dat $\pi_{11} \geq N+1$. Dus de som gaat aleen maar over de π waarvoor geldt dat $\pi_{11} \leq N$. De rechterkant kunnen we met behulp van a) herschrijven tot

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^N} = \big(1 + \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{|\lambda|}\big)^N.$$

We beschouwen nu een term van deze uitdrukking als iets van de vorm

$$q^{|\lambda_1|} q^{|\lambda_2|} \cdots q^{|\lambda_N|}.$$

Waarbij we ook het rijtje $(0, 0, \dots, 0)$ meenemen zodat $q^{|\lambda|} = 1$. Laat nu

$$n_\lambda = \#\{i \leq N \text{ zodat } \lambda = \lambda_i\}.$$

Stel dit geeft ons de verzameling $\{n_{\lambda'_1}, \dots, n_{\lambda'_m}\}$ van $n_\lambda \neq 0$. Dan kunnen we deze combinatie van $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ krijgen op

$$\frac{N!}{(n_{\lambda'_1})! \cdots (n_{\lambda'_m})!}$$

manieren.
Nu gaan we de linkerkant van de uitdrukking herschrijven. Hiervoor gebruiken we weer dat $\pi_{11} = \sum_{\lambda\in\Lambda} n_\lambda$ en $|\pi| = \sum_{\lambda\in\Lambda} n_\lambda|\lambda|$. We krijgen

$$1 + \sum_{\pi\in\Pi} \prod_{\{n_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\in W_\pi} \prod_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{n_\lambda!} \prod_{n=1}^{\sum n_\lambda} (N-(n-1)) q^{\sum n_\lambda|\lambda|}.$$

Dit kunnen herschrijven tot

$$1 + \sum_{\pi\in\Pi} \prod_{\{n_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\in W_\pi} \frac{N!}{(\prod_{\lambda\in\Lambda} n_\lambda!)(N-\sum n_\lambda)!} q^{\sum n_\lambda|\lambda|}.$$

Op eenzelfde manier als bij b) kunnen we de vergelijkingen nu aan elkaar praten.

10. Aantal getallen die relatief priem zijn is niet relatief priem

drs. S. (Stijn) Cambie
Radboud Universiteit Nijmegen

De Euler totiënt functie ϕ is gedefinieerd als de functie die een natuurlijk getal n met priemfactorisatie $\prod_{i=1}^{j} p_i^{e_i}$ afbeeldt op

$$\prod_{i=1}^{j}(p_i - 1)p_i^{e_i-1}.^2$$

Wat is de kleinste verhouding voor m/n zodat voor alle natuurlijke getallen k geldt dat $\phi(k!)^n \mid (k!)^m$?

Uitwerking.
We zullen bewijzen dat die kleinste verhouding gelijk is aan $\frac{7}{4}$, hetgeen scherp is voor $k = 7$, daar $7! = 5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ en $\phi(5040) = 2^7 \cdot 3^2$.
Zij $v_p(n)$ de exponent van p in de priemfactorisatie van n. Het is voldoende te bewijzen dat voor elk priemgetal p geldt dat $4v_p(\phi(k!)) \le 7v_p(k!)$.
Voor $k < p$ is dit triviaal. Voor $k \ge p$ hebben we dat

$$v_p(\phi(k!)) = v_p(k!) - 1 + v_p\left(\prod_{q \le k \ \ priem, q \equiv 1 \pmod p} (q-1)\right).$$

We bewijzen het eerst voor oneven priemgetallen.

Lemma 2. *Zij p oneven, dan hebben we dat $\frac{3}{2}v_p(k!) \ge v_p(\phi(k!))$ voor elk natuurlijk getal k.*

Bewijs. Het is voldoende om te bewijzen dat

$$v_p\left(\prod_{q \le k \ \ priem, q \equiv 1 \pmod p} (q-1)\right) \le \frac{1}{2}v_p(k!).$$

Omdat p oneven is en de priemgetallen q oneven, zal $q \equiv 1 \pmod{2p}$. Dit betekent dat

$$\begin{aligned} v_p\left(\prod_{q \le k \ \ priem, q \equiv 1 \pmod p} (q-1)\right) &\le v_p\left(2p \cdot 4p \cdot \ldots \cdot 2p\left\lfloor \frac{k}{2p} \right\rfloor\right) \\ &= v_p\left(p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot p\left\lfloor \frac{k}{2p} \right\rfloor\right) \\ &= v_p\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor !\right) \\ &\le \frac{1}{2}v_p(k!). \end{aligned}$$

De laatste ongelijkheid is een gevolg van het feit dat $\binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ een natuurlijk getal is. □

Vervolgens bekijken we het geval $p = 2$.

Lemma 3. *Voor elk natuurlijk getal k geldt dat $v_2(k!) \le k - 1$.*

[2]Dit is gelijk aan het aantal getallen tussen 0 en n relatief priem met n.

Bewijs. Merk op dat

$$v_2(k!) = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor < \sum_{i \geq 1} \frac{k}{2^i} = k.$$

□

Het is voldoende te bewijzen dat voor ieder oneven getal k geldt dat

$$v_2 \left(\prod_{q \leq k \ priem, q \equiv 1 \pmod 2} (q-1) \right) \leq \frac{3}{4} v_2(k!) + 1.$$

Dit is equivalent met bewijzen dat voor oneven k geldt dat

$$v_2 \left(\prod_{q \leq k \ samengesteld} (q-1) \right) \geq \frac{1}{4} v_2(k!) - 1.$$

Dit kan eenvoudig gecontroleerd worden voor $k \leq 7$, waarbij gelijkheid enkel geldt voor $k = 7$. Voor oneven $k \geq 9$, kunnen we zelfs de sterkere uitspraak nagaan.

Lemma 4. *Voor oenven $k \geq 9$, hebben we dat*

$$v_2 \left(\prod_{q \leq k \ samengesteld} (q-1) \right) \geq \frac{1}{4} k - 1.$$

Bewijs. Inductie basis: Dit is eenvoudig gecontroleerd voor $9 \leq k \leq 21$ omdat $9, 15$ en 21 samengesteld zijn.
Inductie hyposthese: We veronderstellen dat het waar is voor $9 \leq k \leq K$ waarbij $K \geq 21$.
Inductie stap: We bewijzen het voor $K + 2$.

$$\begin{aligned} v_2 \left(\prod_{q \leq K+2 \ samengesteld} (q-1) \right) &\geq v_2 \left(\prod_{q \leq K-10 \ samengesteld} (q-1) \right) + 3 \\ &\geq \frac{K-10}{4} - 1 + 3 = \frac{K+2}{4} - 1. \end{aligned}$$

omdat er minstens twee samengestelde getallen $K - 10 < q \leq K + 2$ zijn, waarbij één $\equiv 3 \pmod{12}$ is en de ander $\equiv 9 \pmod{12}$. Met volledige inductie concluderen we dat de uitspraak waar is voor alle oneven $k \geq 9$. □

Samen met Lemma 3 bewijst dit de opgave.

Opmerking.
Merk op dat voor grote waarden n er slechts $(1 + o(1))\frac{n}{\log n}$ priemgetallen q kleiner dan n zijn en de factoren $q - 1$ gemiddeld slechts 2 factoren 2 opleveren. Dit omdat het aantal priemgetallen tot en met n die $\equiv 2^i + 1 \pmod 2)^{i+1}$ zijn, gelijk is aan $(1 + o(1))\frac{n}{2^i \log n}$ en $\sum_{i \geq 1} \frac{i}{2^i} = 2$. Iets gelijkaardig geldt voor alle oneven priemgetallen p.
Iedere verhouding $\frac{m}{n}$ strikt groter dan 1 zal dus werken voor de vraag voor k voldoende groot.

Dit is een advertentie, deze opgave wordt niet nagekeken.

transtrend

Probleem:

Een getal is een tweemacht wanneer het kan worden geschreven als 2^k met k een geheel getal ≥ 0.

Een getal is een reekssom als het de som is van een reeks van minimaal 2 opeenvolgende positieve gehele getallen, bijvoorbeeld $15 = 4 + 5 + 6$.

Bewijs dat alle positieve gehele getallen of een tweemacht zijn, of een reekssom, maar nooit beide.

Stuur je bewijs naar wiskunde@transtrend.com

"Bij Transtrend ontwikkelen vindingrijke bèta's systematische handelsstrategieën waarmee het vermogen van professionele beleggers wordt beheerd."

11. Reële periodieke banen

Prof. dr. J. (Jaap) Top
Rijksuniversiteit Groningen

Voor een gegeven polynoom $p(x)$ in één variabele met reële coëfficiënten en een complex getal a_1, definiëren we een rij $(a_n)_{n\geq 1}$ door te itereren: dus $a_2 = p(a_1)$, $a_3 = p(a_2)$ et cetera. We hebben dan $a_{n+1} = p(a_n)$ voor alle gehele $n \geq 1$.

We noemen de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ een periodieke baan van deze iteratie als $a_m = a_1$ voor een $m > 1$. We noemen zo'n periodieke baan reëel wanneer $a_n \in \mathbb{R}$ voor alle n. Als voorbeeld kan je kijken naar $p(x) = x^2$. Elke rij die start met $a_1 = e^{2\pi i r}$, waarbij r een rationaal getal is met oneven noemer, is een periodieke baan. Ook is de rij die start met $a_1 = 0$ periodiek. Het blijkt dat dit alle periodieke banen zijn voor dit polynoom, en in het bijzonder zijn de enige reële periodieke banen de rijen die starten met $a_1 \in \{0, 1\}$. Veel van de periodieke banen zijn niet reëel.

Echter is de situatie heel anders voor het polynoom $q(x) = 2x^2 - 1$. Laat zien dat alle periodieke banen van $q(x)$ reëel zijn!

Uitwerking.
We definiëren $f_n(x)$ met de recursieve relatie $f_1(x) = x$ en $f_{n+1}(x) = q(f_n(x))$. We gaan bewijzen dat de polynomen $f_n(x) - x$ alleen maar reële nulpunten hebben. Voor elke periodieke baan $(a_n)_{n\geq 1}$ van q geldt dat er een $m > 1$ bestaat met $a_m = a_1$, dus dan geldt er dat a_1 een nulpunt is van $f_m(x) - x$. Dus als we weten dat dat polynoom alleen maar reële nulpunten heeft, dan volgt ook dat a_1 reëel is en daarmee dat de hele baan uit reële getallen bestaat.

Er geldt dat de graad van $f_n(x)$ precies 2^{n-1} is. We doen nu de belangrijke observatie dat $q(\cos(\theta)) = \cos(2\theta)$, dus er volgt met inductie dat $f_n(\cos(\theta)) = \cos(2^{n-1}\theta)$.

Voor $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-2}\}$ definiëren we $a_k = \frac{2\pi k}{2^{n-1}+1}$. Dan geldt er:

$$f_n(\cos(a_k)) = \cos(2^{n-1}a_k) = \cos\left(2\pi k \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}\right) = \cos\left(2\pi k\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}+1}\right)\right) = \cos(a_k)$$

Dus $\cos(a_k)$ is een nulpunt van $f_n(x) - x$. Vervolgens bekijken we voor $l \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$ naar $b_l = \frac{2\pi l}{2^n - 1}$ en zien we dat ook $\cos(b_l)$ voor alle l een nulpunt is van $f_n(x) - x$. Er geldt verder dat de doorsnede van de rijtjes a_k en b_l alleen bestaat uit 0, dus we hebben in totaal $2^{n-2} + 1 + 2^{n-2} - 1 = 2^{n-1}$ getallen θ zodat $\cos(\theta)$ een nulpunt is van $f_n(x) - x$, en aangezien deze ook allemaal in het interval $[0, \pi]$ liggen en cos op dat interval injectief is zien we tenslotte dat we zo ook precies 2^{n-1} reële nulpunten van $f_n(x) - x$ hebben gevonden. Aangezien 2^{n-1} de graad van dit polynoom is volgt dus dat alle nulpunten van dit polynoom reëel zijn.

12. Kleur de lijn met oneindig veel kleuren

Prof. dr. D. (Dion) Gijswijt
Technische Universiteit Delft

We zoeken een surjectieve functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ met de eigenschap dat voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ het volgende geldt:

$$a + c = 2b \implies \#\{f(a), f(b), f(c)\} < 3.$$

Bestaat zo'n functie?

Uitwerking.
Voor een geheel getal $n \neq 0$ noteren we met $\mathrm{ord}_3(n)$ het grootste gehele getal k waarvoor 3^k een deler is van n. Meer algemeen definiëren we de 3-*adische orde* $\mathrm{ord}_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ door

$$\mathrm{ord}_3\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} \infty & \text{als } a = 0, \\ \mathrm{ord}_3(a) - \mathrm{ord}(b) & \text{anders.} \end{cases}$$

We zullen bewijzen dat een functie f met de gewenste eigenschappen bestaat. Als tussenstap definiëren we $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty, -\infty\}$ door

$$g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{als } x \notin \mathbb{Q} \\ \mathrm{ord}_3(x) & \text{als } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Laat $a, b, c \in \mathbb{R}$ en neem aan dat $a + c = 2b$. We zullen aantonen dat $g(a)$, $g(b)$ en $g(c)$ verschillend zijn. Als hoogstens één van de getallen a, b, c rationaal is, dan is dit duidelijk. We zullen daarom aannemen dat ten minste twee van de getallen a, b, c rationaal zijn. Omdat $a + c = 2b$, volgt hieruit dat $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
Voor $a, c \in \mathbb{Q}$ geldt

$$\mathrm{ord}_3(a + c) \geq \min(\mathrm{ord}_3(a), \mathrm{ord}_3(c)),$$

met gelijkheid als $\mathrm{ord}_3(a) \neq \mathrm{ord}_3(c)$. Dus als $g(a) \neq g(c)$, dan volgt

$$g(b) = g(2b) = g(a + c) = \min(g(a), g(c)),$$

zodat $g(b) = g(a)$ of $g(b) = g(c)$.
Laat $h : \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\} \to \mathbb{Z}$ een bijectie zijn. Dan is $f = h \circ g$ van de verlangde vorm.